Baden-Württemberg

Leistungsfach Mathematik

Schriftliche Abiturprüfung

ab 2023

Informationen

Beispielaufgabe

Aufgabenfundus

Hinweis

Dieses Konvolut „Abitur ab 2023“ führt die entsprechende Zusammenstellung „Abitur 2021 und 2022“ fort.

Beispielaufgabe und Aufgabenfundus enthalten exemplarisch, d. h. in keiner Weise auf Vollständigkeit angelegt, Aufgabenstellungen zu neuen Inhalten, die 2023 erstmals Gegenstand der Abiturprüfung sein können; insbesondere sind dies:

Analysis
- Wurzelfunktion
- ln-Funktion
- Umkehrfunktion

Geometrie
- Vektorprodukt

Stochastik
- elementare Kombinatorik
- Vierfeldertafeln
- bedingte Wahrscheinlichkeit
- stochastische Unabhängigkeit

Fast alle im vorangegangenen Konvolut „Abitur 2021 und 22“ enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf inhaltliche Kompetenzen, die auch ab 2023 weiterhin Gegenstand der schriftlichen Abiturprüfung sein werden.
Dies gilt jedoch nicht für folgende Aufgaben:
- Beispiel B 2.1, Fundus II.4 und II.5 (Beweise mit Hilfe von Vektoren)
- Fundus II.13 (allgemeine stetige Verteilung)

Aus Platzgründen enthält dieses Konvolut keine systematische Sammlung von **IQB-Aufgaben**.
Die IQB-Aufgaben (Sammlung 2015, Pools seit 2017) liegen in separaten Zusammenstellungen vor; alle dort zusammengestellten IQB-Aufgaben bilden ausschließlich solche inhaltlichen Kompetenzen ab, die auch Gegenstand der schriftlichen Abiturprüfung in Baden-Württemberg ab 2023 sein können, und sind daher zur Prüfungsvorbereitung uneingeschränkt geeignet.

Inhalt

Struktur eines Aufgabensatzes

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)		**15 VP**	**Pflichtteil** (15 VP)
	6 Aufgaben	à 2,5 VP	
keine Auswahlmöglichkeit			
Anteile der Sachgebiete:			
- Analysis:	3-4 Aufgaben	à 2,5 VP	
- Geometrie:	1-2 Aufgaben	à 2,5 VP	
- Stochastik:	1-2 Aufgaben	à 2,5 VP	

Wahlteil Analysis — 20 VP

Die Lehrkraft wählt zwischen A 1 und A 2.

Analysis A 1 (20 VP)	**Analysis A 2** (20 VP)

Wahlteil Geometrie — 12,5 VP

Die Lehrkraft wählt zwischen B 1 und B 2.

Geometrie B 1 (12,5 VP)	**Geometrie B 2** (12,5 VP)

Wahlteil Stochastik — 12,5 VP

Die Lehrkraft wählt zwischen C 1 und C 2.

Stochastik C 1 (12,5 VP)	**Stochastik C 2** (12,5 VP)

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Vorbemerkung

Die Angabe „**nicht**“ bedeutet jeweils, dass Schülerinnen und Schüler in Bezug auf diesen Inhalt über keine spezifischen Kompetenzen verfügen müssen; sie bedeutet aber nicht, dass dieser Inhalt in keiner Form Gegenstand der schriftlichen Prüfung sein kann.

Die Angabe „**neu**“ bedeutet jeweils, dass dieser Inhalt erstmals im Abitur 2023 Gegenstand der schriftlichen Prüfung sein wird.

Gleichungen

s. unten: „Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre“

Analysis

- Kenntnis grundlegender Funktionstypen und ihrer charakteristischen Eigenschaften:
  Potenzfunktionen
  ganzrationale Funktionen
  Wurzelfunktionen (**neu**)
  trigonometrische Funktionen
  einfache gebrochen-rationale Funktionen
  natürliche Exponentialfunktion
  ln-Funktion (**neu**)
- Wirkung von Parametern, insbesondere:
  Verschiebungen in x- und y-Richtung
  Streckungen in x- und y-Richtung
  Spiegelungen an x- bzw. y-Achse
- Zusammengesetzte Funktionen:
  Summen, Differenzen
  einfache Produkte, Quotienten
  einfache Verkettungen
- Umkehrfunktion (**neu**)
  Definitions- und Wertemenge, Graph, Funktionsterm
- Bestimmung von Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften
- Funktionenscharen
  nicht: Ortslinien
- Ableitung (auch höhere Ableitungen)
- Änderungsrate
- Ableitungsfunktion
- Tangente und Normale
- Ableitungsregeln:
  Summen- und Faktorregel
  Potenzregel
  Produktregel
  Kettenregel

- Untersuchung von Funktionen und Graphen, insbesondere:
  Definitions- und Wertemenge
  Nullstellen
  elementare Symmetrie
  Grenzverhalten, senkrechte und waagerechte Asymptoten
  Monotonie, Krümmungsverhalten
  Extrempunkte, Wendepunkte
- Anwendung der Differenzialrechnung, insbesondere:
  Extremwertbestimmungen, auch mit Nebenbedingungen
- Stammfunktionen:
  Summenregel
  Faktorregel
  lineare Substitution
  nicht: Stammfunktion der ln-Funktion
- Integral
- Integralfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Anwendungen der Integralrechnung:
  Flächeninhalte (auch unbegrenzte Flächen)
  rekonstruierter Bestand
  Volumen von Rotationskörpern
  nicht: Mittelwert
- nicht: Näherungsverfahren (zur Bestimmung von Nullstellen bzw. der Eulerschen Zahl e)

<u>Analytische Geometrie</u>

- Vektor, Ortsvektor, Linearkombination, Betrag
- Geraden
- Ebenen (Parameter-, Koordinaten-, Normalenform)
- Geraden- und Ebenenscharen
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt
- Vektorprodukt (<u>**neu**</u>)
- Orthogonalität
- Spiegelungen
- Abstands- und Winkelberechnungen
  auch: Abstand windschiefer Geraden
- Flächen- und Volumenberechnungen
- zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum:
  Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden
- Anwendung der analytischen Geometrie:
  Bewegungen im Raum
- nicht: Beweise mit Hilfe von Vektoren

Stochastik

- elementare Kombinatorik (**neu**)
- mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme, Pfadregeln, Vierfeldertafeln (**neu**)
- bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit (**neu**)
- diskrete Zufallsgröße
  Wahrscheinlichkeitsverteilung
  Erwartungswert
- Binomialverteilung
  Formel von Bernoulli
  Erwartungswert, Standardabweichung
  Histogramme
- Testen von Hypothesen mithilfe der Binomialverteilung
  ein- und zweiseitiger Test
  Fehler 1. und 2. Art
- Normalverteilung
  Dichtefunktion
  Erwartungswert, Standardabweichung
  Glockenkurve
- nicht: allgemeine stetige Zufallsgröße

Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre

0. Grundtechniken

- Faktorisierung durch Ausklammern
- Anwendung einer binomischen Formel „rückwärts"
- Substitution
- Einsetzungsverfahren
- Fallunterscheidung in einfachen Fällen (z. B. bei Gleichungen mit Parametern, Betragsgleichungen)

1. Lineare Gleichungen

Beispiel

1.1 $ax = x + 3$ 1.2 $tx = 3t$

2. Quadratische Gleichungen

Beispiele

2.1 $\frac{5}{2}x^2 - 4x = 2$ 2.2 $2x^2 = 1{,}8x - 0{,}4$

2.3 $x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0$ 2.4 $9x^2 - 3ux + 1 = 0$

3. Potenzgleichungen

- Lösen von Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten
- bei negativen Exponenten: siehe 6.4

Beispiele

3.1 $4x^3 + 35 = 21$ 3.2 $(1-x)^{12} = 0{,}05$

4. Exponentialgleichungen

- Lösen von Exponentialgleichungen mit beliebiger Basis

Beispiele

4.1 $4 \cdot e^{-x} = 1$ 4.2 $2 \cdot 3^x = 8$

4.3 $2 \cdot e^{2x+1} = 3$

5. Wurzelgleichungen

- Lösen von Wurzelgleichungen durch Quadrieren, ggf. nach Isolieren des Wurzelterms
- Überprüfung der ermittelten Lösung
- nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen)
- nicht: Optimierung bei Wurzelfunktionen mit Mitteln der Differentialrechnung

Beispiele

5.1 $\sqrt{x^2+x^4}=\sqrt{20}$

5.2 $\sqrt{(x-2)^2+9+(2x)^2}=\sqrt{13}$

5.3 $\sqrt{3x-5}+4=2x$

6. Bruchgleichungen

- Lösen von Bruchgleichungen, die mit elementarem Bruchverständnis lösbar sind
- Lösen von Bruchgleichungen, die durch einmalige Multiplikation mit x^n oder einem Linearfaktor auflösbar sind
- Überprüfung einer ermittelten Lösung

Beispiele

6.1 $\frac{x}{x+2}=\frac{2}{3}$

6.2 $\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x}=3$

6.3 $2x-7=\frac{1}{x-3}$

6.4 $x^{-4}=81$

6.5 $\frac{2x}{\sqrt{15x^2+4}}=\frac{1}{2}$

7. Trigonometrische Gleichungen

- Bestimmung der Lösungen einfacher trigonometrischer Gleichungen in einem vorgegebenen Intervall
- nicht: allgemeine Angabe aller Lösungen

Beispiele

7.1 $\sin(3x)=-1$; $0\le x\le\pi$

7.2 $\cos(2x)=-0{,}8$; $0\le x\le 2\pi$ (mit WTR)

8. Betragsgleichungen

- Lösen einfacher Betragsgleichungen (nur <u>ein</u> Betrag) durch Fallunterscheidung

<u>Beispiel</u>

8.1 $\frac{|24-x|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

9. Ungleichungen

- Lösen von Ungleichungen, die über die entsprechende Gleichung und anschließende funktionale Betrachtung gelöst werden können
- <u>nicht</u>: Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen

<u>Beispiele</u>

9.1 $2x-5>1$

9.2 $-x^2+3x+7>3$

9.3 $(x+3)(x-1)>0$

9.4 $(2x-1)\cdot e^{-2x}<0$

9.5 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^x>0{,}9$

9.6 $|24-x|<10$

10. Lineare Gleichungssysteme

- Lösen eines LGS, auch mit Parameter auf der rechten Seite

<u>Beispiele</u>

10.1
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 4x_3 & = & -21 \end{array}$$

10.2
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2r \\ 5x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2r+6 \end{array}$$

Neben selbstverständlich bekannten mathematischen Schreibweisen werden insbesondere die folgenden Notationen innerhalb der schriftlichen Abiturprüfung verwendet und daher bei den Schülerinnen und Schülern als bekannt vorausgesetzt:

Notation	**Erklärung**
IR^+, IR_0^+, $\mathrm{IR}\setminus\{2\}$	Mengen reeller Zahlen
$[a;b]$, $]a;b]$, $]-\infty;b]$	Intervalle reeller Zahlen
$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$	Summationszeichen
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} +\infty$	Limes-Schreibweisen
$\overline{A} \cup B$ $\overline{A \cap B}$	Verknüpfungen von Ereignissen (Negation, Vereinigung, Schnitt)
$P_A(B)$	bedingte Wahrscheinlichkeit

Anforderungen an Schülerlösungen und deren Dokumentation

Von den Schülerinnen und Schülern wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation erwartet, dazu gehören insbesondere:

- durch Verbalisierung des Vorgehens und Ergebnissätze strukturierte Darstellung
- angemessener sprachlicher Ausdruck, insbesondere korrekte Fachsprache
- Definition neu eingeführter Bezeichnungen
- keine Angaben über Tastenfolgen von WTR-Eingaben

Operatoren

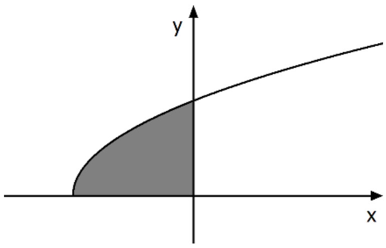
Die Bedeutung der bei Arbeitsaufträgen verwendeten Operatoren entspricht in den meisten Fällen (z. B. bei *deuten, interpretieren, erläutern*) dem allgemein üblichen Sprachgebrauch. Die folgenden Hinweise beschreiben bei typischen und häufig vorkommenden Operatoren Umfang und Qualität der erwarteten Lösung.

Operator	Hinweise
angeben *nennen* *darstellen*	• kein Ansatz, keine Begründung, kein Lösungsweg
beschreiben	• sprachlich (auch fachsprachlich) angemessene Formulierungen • keine Begründung
begründen *nachweisen* *zeigen*	• logisches Schließen bzw. Argumentieren
beurteilen	• mit Begründung
berechnen	• mathematischer Ansatz • nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg
bestimmen *ermitteln* *untersuchen*	• Art des Vorgehens frei wählbar (grafisch, rechnerisch), sofern nicht anders angegeben • nachvollziehbarer dokumentierter Lösungsweg
grafisch darstellen *zeichnen*	• möglichst genaue Darstellung
skizzieren	• bei Koordinatensystemen: beschriftete und skalierte Achsen • Reduktion auf charakteristische Eigenschaften

Wird in einer Aufgabenstellung ein „exakter Wert“ gefordert, dann ist damit ein mathematisch exakter Ausdruck (z. B. $\frac{5}{7}$, $\ln(2)$, $\frac{\pi}{4}$) gemeint, nicht eine gerundete Dezimalzahl.

Aufgabe 1

Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x+16}$.
Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



(2,5 VP)

Aufgabe 2

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ mit $t \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le 10$, beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung.

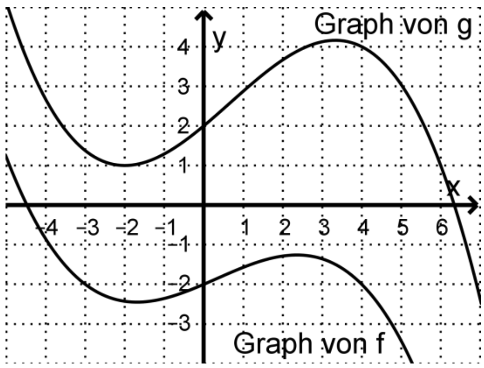
b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde –30 beträgt.

(2,5 VP)

Aufgabe 3

Die Abbildung zeigt die Graphen der ganzrationalen Funktionen f und g. Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = g(f(x))$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(4\,|\,h(4))$.



(2,5 VP)

Aufgabe 4

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(r, s \in \mathbb{R})$.

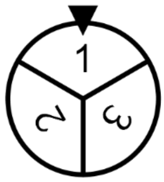
a) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an.
Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.

b) Die Ebene E enthält die Geraden g und h.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(2,5 VP)

Aufgabe 5

Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a) Die Zufallsgröße X gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an.
Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte.

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		

b) Betrachtet werden die Ereignisse A und B:
A: „Es wird (1;3), (2;2) oder (3;1) erzielt."
B: „Beim ersten Drehen wird eine 2 erzielt."
Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

(2,5 VP)

Aufgabe 6

Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

a) Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschieden Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term $\binom{3}{2}\cdot 14$ berechnet werden. Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang.

b) In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \le t \le 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an.
Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

$$\text{I} \quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100, \qquad a \in \mathbb{R}$$
$$\text{II} \quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100, \quad b \in \mathbb{R}$$

(5 VP)

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(3,5 VP)

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \le t \le 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

(4,5 VP)

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(4,5 VP)

Aufgabe A 1.2

Zeigen Sie: Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion f die x-Achse in einem Punkt P berührt, dann gilt dies auch für den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{f(x)} - 1$.

(2,5 VP)

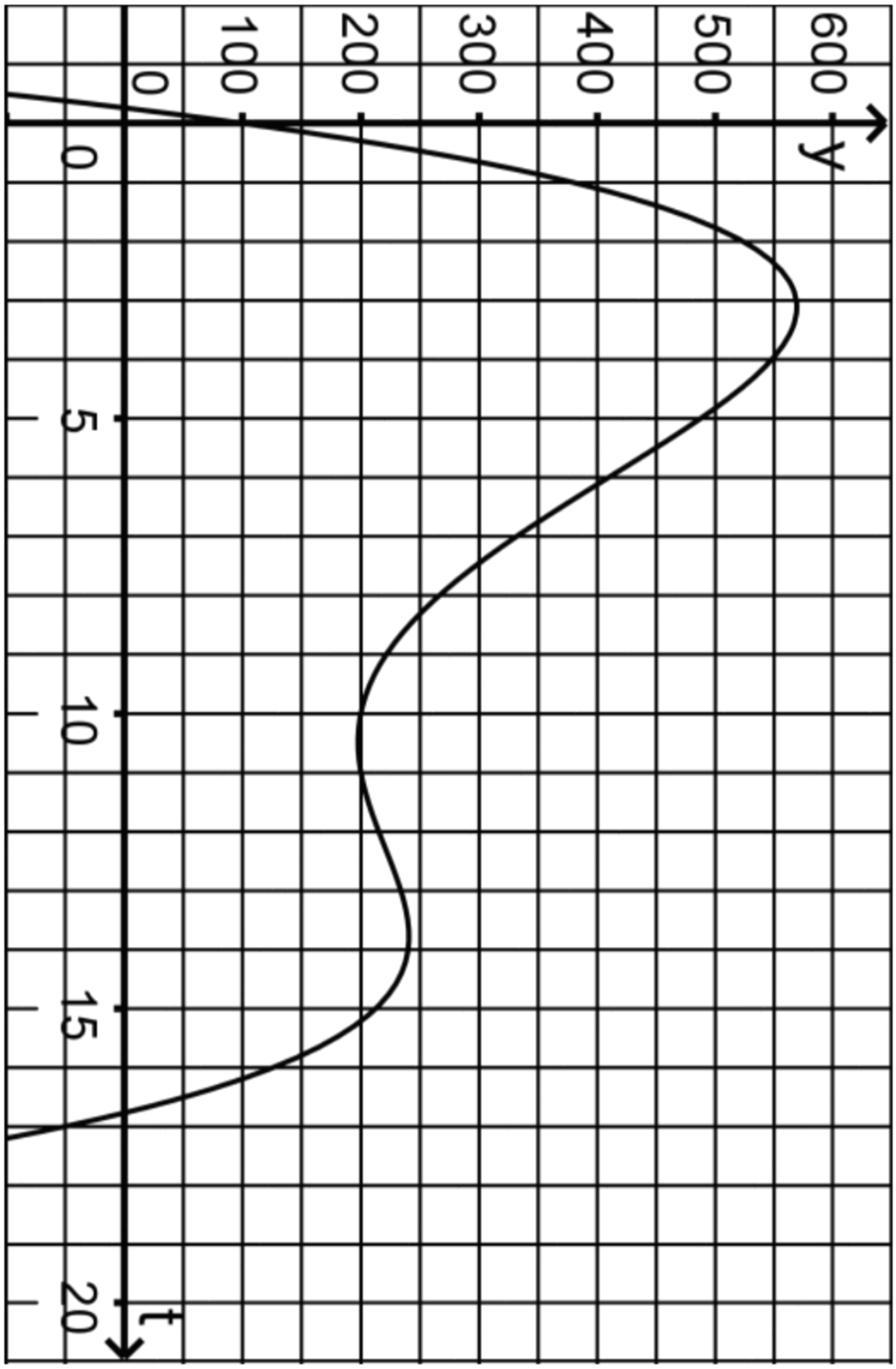
Zu- und Vorname: ______________________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: ______________________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe A 1.1



Gegeben sind der Punkt $R(4\,|\,-2\,|\,4)$ und die Ebenenschar $E_k:\ kx_1 + kx_2 + x_3 = 14\ (k \in \mathbb{R})$.

a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem.
Bestimmen Sie diejenige Ebene der Schar, die den Punkt R enthält.
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E_5 und E_0.
Zeigen Sie, dass es eine Gerade g gibt, die in allen Ebenen der Schar liegt.
Bestimmen Sie die Ebenen der Schar, von denen der Punkt R den Abstand 2 hat.

(7 VP)

b) Gegeben sind die Spurpunkte $S_1(7\,|\,0\,|\,0)$, $S_2(0\,|\,7\,|\,0)$, $S_3(0\,|\,0\,|\,14)$ einer Ebene E.
Begründen Sie, dass die Ebene E eine Ebene der Schar ist.
Betrachtet wird ein gerader Kegel mit der Spitze S_3, dessen Grundkreis in der x_1x_2-Ebene liegt. Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf dem Grundkreis.
Untersuchen Sie, ob der Punkt R innerhalb des Kegels liegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, die den Kegel in der Strecke S_1S_3 berührt.

(5,5 VP)

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %. Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

a) Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.
Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
  A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv."
  B: „Das Testergebnis ist negativ."
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.

(4,5 VP)

b) Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 20000 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt. Berechnen Sie in einem geeigneten Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von X abweicht. (2 VP)

Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem ein Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen kleiner als 15 mg, so ist dieser unbrauchbar.
Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

c) Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können.
Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll sich durch diese Änderung jedoch nicht erhöhen.
Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss.
(4 VP)

d) Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt. Vor einer Verbesserung des Herstellungsverfahrens hatte der Erwartungswert 20 mg und die Standardabweichung 4,0 mg betragen. Durch die Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert.
Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung (auf eine Dezimale gerundet).
(2 VP)

Für die Fachlehrerin, den Fachlehrer
Die Lösungshinweise erheben nicht den Anspruch, die einzigen oder kürzesten Lösungswege aufzuzeigen.
Sie sollen unter anderem eine Orientierungshilfe bei der Auswahl der Aufgaben durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer sein. Maßgebend für die Korrektur ist allein der Aufgabentext und jede nach diesem Text mögliche Lösung.

Zum Pflichtteil

Aufgabe 1

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-4$, $A=\int_{-4}^{0}\sqrt{4x+16}=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot(4x+16)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{0}=\frac{32}{3}$ (2,5 VP)

Aufgabe 2

a) $\frac{n(2)-n(0)}{2}=-\frac{108}{2}=-54$ (1,5 VP)

b) $n'(t)=6t-60$, $n'(t)=-30$ liefert $t=5$

Der Zeitpunkt ist fünf Stunden nach Beginn der Messung erreicht. (1 VP)

Aufgabe 3

$h'(4)=g'(f(4))\cdot f'(4)=g'(-2)\cdot f'(4)=0\cdot f'(4)=0$, mit $h(4)=g(f(4))=g(-2)=1$ ergibt sich $y=1$ als Gleichung der Tangente. (2,5 VP)

Aufgabe 4

a) Schnittpunkt: $S(3\,|\,-3\,|\,3)$ (0,5 VP)

Nachweis: $\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\3\end{pmatrix}=15-12-3=0$, somit verlaufen g und h senkrecht zueinander. (0,5 VP)

b) $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-14\\-29\end{pmatrix}$, mit $S\in E$ ergibt sich $E: 9x_1-14x_2-29x_3=-18$. (1,5 VP)

Aufgabe 5

a) (1 VP)

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

b) $P(A)=3\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=P((2;2))=\frac{1}{9}=P(A)\cdot P(B)$.

A und B sind stochastisch unabhängig. (1,5 VP)

Aufgabe 6

a) Der erste Faktor gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, zwei der drei Farben auszuwählen. Der zweite Faktor gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, eine Anzahl von Tulpen aus dem Strauß für die erste Farbe zu bestimmen. (1 VP)

b) Es gibt eine Möglichkeit, jeweils fünf Tulpen jeder Farbe zu nehmen. Außerdem kann man von einer Farbe vier, von einer zweiten Farbe fünf und von einer dritten Farbe sechs Tulpen nehmen. Dafür gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten. Somit gibt es insgesamt sieben Möglichkeiten. (1,5 VP)

<u>Zum Wahlteil</u>

Aufgabe A 1.1

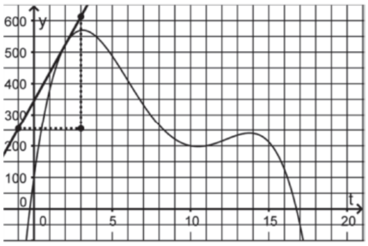
a) <u>Volumen des Wassers</u> (0,5 VP)

Dem Graphen entnimmt man, dass das Volumen fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn etwa 490 m^3 beträgt.

<u>Zeitraum</u> (1 VP)

Dem Graphen entnimmt man, dass das Wasservolumen im Zeitraum von etwa 0,9 Stunden bis etwa 6,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn mindestens 350 m^3 beträgt

<u>Momentane Änderungsrate</u> (2 VP)



$$f'(2) \approx \frac{360}{4} = 90$$

Die momentane Änderungsrate zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa 90 m^3 pro Stunde.

<u>Begründung</u> (1,5 VP)

Hätte die Funktionsgleichung von f die Form I, dann müsste der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

Hätte die Funktionsgleichung von f die Form II, dann besäße der Graph von f höchstens zwei Extremstellen, da f eine ganzrationale Funktion dritten Grades wäre.

b) <u>Verfahren</u> (1,5 VP)

Man zeichnet die Tangente an den Graphen von f im Punkt P(15|f(15)) ein. Die Stelle, an der diese Tangente die x-Achse schneidet, stellt den gesuchten Zeitpunkt dar.

Interpretation (1,5 VP)
Die Lösungen der Gleichung beschreiben Zeitpunkte, in denen das Becken 350 m^3 mehr Wasser enthält als sechs Stunden später.

Lösung (0,5 VP)
Eine Lösung ist beispielsweise $t \approx 4$.

c) Zeitpunkt (2,5 VP)
$g'(t) = 0{,}4 \cdot \left(6t^2 - 78t + 180\right)$, die notwendige Bedingung $g'(t) = 0$ führt zur Gleichung $t^2 - 13t + 30 = 0$ mit den Lösungen $t_1 = 3$ und $t_2 = 10$.
Wegen $g(0) = 0$, $g(3) = 97{,}2$, $g(10) = -40$ und $g(15) = 270$ ist die Änderungsrate zum Zeitpunkt 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.

Zeitraum (2 VP)
$g(t) = 0 \Leftrightarrow t \cdot \left(2t^2 - 39t + 180\right) = 0$. Lösungen sind $t_3 = 0$, $t_4 = 7{,}5$ und $t_5 = 12$.
Wegen $g(3) = 97{,}2$, $g(8) = -12{,}8$ und $g(15) = 270$ nimmt das Wasser im Zeitraum zwischen 7,5 Stunden und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ab.

d) Volumen (2 VP)

$$350 = V_0 + \int_0^3 g(t)\,dt \Leftrightarrow V_0 = 350 - \int_0^3 g(t)\,dt = 350 - \left(G(3) - G(0)\right) = 150{,}2$$

Zu Beobachtungsbeginn betrug das Wasservolumen etwa 150 m^3.

Zeitpunkt gleiches Wasservolumen (2,5 VP)
Es muss ein a mit $0 < a \leq 15$ geben mit $\int_0^a g(t)\,dt = 0$. Dies führt auf die Gleichung $a^4 - 26a^3 + 180a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot \left(a^2 - 26a + 180\right) = 0$. Die einzige Lösung ist $a_1 = 0$.
Es gibt also keinen solchen Zeitpunkt.

Aufgabe A 1.2

Nachweis (2,5 VP)
Nach Voraussetzung ist $f(a) = 0$ und $f'(a) = 0$ für ein $a \in \mathbb{R}$.
Zu zeigen ist: $g(a) = 0$ und $g'(a) = 0$.
$g(a) = e^{f(a)} - 1 = e^0 - 1 = 0$
Es gilt $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$. Somit folgt $g'(a) = e^0 \cdot 0 = 0$.

Aufgabe B 1

a) <u>Besondere Lage</u> (0,5 VP)

Die Ebene E_0 ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

<u>Ebene, die den Punkt R enthält</u> (0,5 VP)

Punktprobe $R \in E_k$ führt auf die Gleichung $4k - 2k + 4 = 14$ mit der Lösung $k = 5$,

somit enthält E_5 den Punkt R.

<u>Schnittwinkel</u> (1,5 VP)

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{51}} \;,\; \alpha \approx 82{,}0^\circ$$

<u>Nachweis gemeinsame Gerade</u> (2 VP)

Schnitt E_0 mit E_1 führt auf das LGS

$$\begin{aligned} x_3 &= 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $(t, -t, 14), t \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\14\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Die Gerade g liegt in jeder Ebene der Schar, da $k \cdot (0+t) + k \cdot (0-t) + 14 = 14$ für jedes $k \in \mathbb{R}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$.

<u>Ebenen mit Abstand 2 von R</u> (2,5 VP)

$d(R, E_K) = \frac{|2k-10|}{\sqrt{2k^2+1}}$, der Ansatz $d(R, E_K) = 2$ führt auf die Gleichung $k^2 + 10k - 24 = 0$

mit den Lösungen $k_1 = 2$ und $k_2 = -12$.

Der Punkt R hat von den Ebenen E_2 und E_{-12} den Abstand 2.

b) <u>Begründung</u> (1 VP)

Punktprobe $S_1 \in E_k$ liefert $k = 2$. Auf E_2 liegen auch S_2 und S_3.

Somit ist E die Ebene E_2.

Untersuchung, ob R im Kegel liegt (2,5 VP)

Der Grundkreises hat den Mittelpunkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$ und den Radius $r=7$. Die Hilfsgerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, enthält S_3 und R. Der Schnittpunkt von h mit der x_1x_2-Ebene ist $P(5{,}6\,|\,-2{,}8\,|\,0)$. $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{5{,}6^2 + 2{,}8^2} \approx 6{,}26 < r$, somit liegt R innerhalb des Kegels.

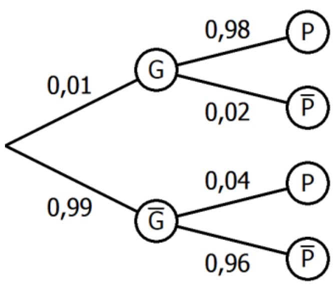
Gleichung der Ebene (2 VP)

Die gesuchte Ebene F enthält die Punkte S_1 und S_3 und ist parallel zur x_2-Achse.

Der Normalenvektor $\vec{n}$ von F ist somit orthogonal zu den Vektoren $\overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mit $S_3 \in F$ ergibt sich $F: 2x_1 + x_3 = 14$.

Aufgabe C 1

a) Baudiagramm (1,5 VP)



G: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.“

P: „Das Testergebnis ist positiv.“

Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B (1,5 VP)

$P(A) = 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}0098$

$P(B) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 + 0{,}99 \cdot 0{,}96 = 0{,}9506$

Wahrscheinlichkeit für Glutenunverträglichkeit bei positivem Test (1,5 VP)

$P_P(G) = \frac{P(G \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}98}{0{,}01 \cdot 0{,}98 + 0{,}99 \cdot 0{,}04} \approx 0{,}198$

b) Wahrscheinlichkeit (2 VP)

Modell: X ist binomialverteilt mit $n = 20000$ und $p = 0{,}01$.

$E(X) = 20000 \cdot 0{,}01 = 200$, $1 - P(0{,}9 \cdot 200 \le X \le 1{,}1 \cdot 200) = 1 - P(180 \le X \le 220) \approx 0{,}145$

c) Mögliche Fehlentscheidungen (2 VP)

Obwohl höchstens 10 % der Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.
Obwohl mehr als 10 % der Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich nicht dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

Mindestanzahl unbrauchbarer Teststreifen (2 VP)

Y_1: Anzahl der unbrauchbaren Teststreifen bei der ursprünglichen Kontrolle.
Sind höchstens 10 % der Teststreifen unbrauchbar, so ist Y_1 binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}1$. Dann ist $P(Y_1 \geq 16) \approx 0{,}040$.
Y_2: Anzahl unbrauchbarer Teststreifen bei der künftigen Kontrolle. Ist die Verbesserung des Herstellungsprozesses unnötig, so ist Y im Extremfall binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}1$. Ist k die Mindestanzahl der unbrauchbaren Teststreifen, so muss gelten:
$P(Y_2 \geq k) \leq 0{,}040$. Es ist $P(Y_2 \geq 28) \approx 0{,}043$ und $P(Y_2 \geq 29) \approx 0{,}027$.

Die Mindestanzahl der unbrauchbaren Teststreifen beträgt 29.

d) Geänderte Standardabweichung (2 VP)

Z_1: Indikatormenge in mg vor der Verbesserung des Verfahrens, Z_1 ist normalverteilt mit $\mu = 20$ mg und $\sigma = 4$ mg. Es ist $P(Z_1 < 15) \approx 0{,}106$.
Z_2: Indikatormenge in mg nach der Verbesserung des Verfahrens, Z_2 ist normalverteilt mit $\mu = 20$ mg und unbekannten Parameter σ. Es muss gelten $P(Z_2 < 15) \approx 5{,}3\,\%$.
Durch systematisches Probieren erhält man $\sigma \approx 3{,}1$ mg.

Aufgabe 1 (IQB 2015)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln\left(e^2 - x\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D.

a) Geben Sie D an.

b) Bestimmen Sie die Nullstelle von f.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $y = -\frac{1}{e^2} \cdot x + 2$ eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\left(0 \,|\, f(0)\right)$ ist.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sqrt{4 - x}$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge von f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P\left(3 \,|\, f(3)\right)$ schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche A ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

c) Der Graph der Funktion f schließt mit den Koordinatenachsen ebenfalls eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Anteil dieser Fläche an der Fläche A.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \ln(x + 3)$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge von f.

b) Begründen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

c) Geben Sie Definitionsmenge und Wertemenge von $\bar{f}$ an.

Aufgabe 4

Die Funktion f mit $f(x) = (x - 1)^3 + 1,\ x \in \mathbb{R}$, ist umkehrbar. Der Graph von f wird mit G_f, der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ mit $G_{\bar{f}}$ bezeichnet. G_f und $G_{\bar{f}}$ schneiden sich in den Punkten $S_1(0|0)$, $S_2(1|1)$ und $S_3(2|2)$.

a) Beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = x^3$ hervorgeht.

b) Bestimmen Sie ohne Bestimmung eines Terms von $\bar{f}$ den Inhalt der Fläche, die G_f und $G_{\bar{f}}$ im Bereich $0 \le x \le 1$ einschließen.

c) Ermitteln Sie ohne Bestimmung eines Terms von $\bar{f}$ die Größe des Winkels, unter dem sich G_f und $G_{\bar{f}}$ im Punkt S_2 schneiden.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4+3x}$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle, Definitions- und Wertemenge von f.
Zeigen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist.

b) Der Graph von f schneidet die erste Winkelhalbierende in einem Punkt P.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten.
Die Tangente t an den Graphen von f im Punkt P hat die Gleichung $y = \frac{3}{8}x + \frac{5}{2}$.
Ermitteln Sie ohne Verwendung eines Terms der Umkehrfunktion $\bar{f}$ eine Gleichung der Tangente an den Graphen von $\bar{f}$ im Punkt P.

c) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion $\bar{f}$ und geben deren Definitions- und Wertemenge an.

d) Die Graphen von f und $\bar{f}$ schließen mit der x-Achse eine Fläche ein.
Skizzieren Sie diese Fläche und berechnen Sie deren Inhalt .

Aufgabe 6 (Auszug aus IQB 2018)

In einem Behälter befinden sich insgesamt 380 Geldscheine. Deren Verteilung kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

Wert des Scheins	5 €	10 €	20 €	50 €
Anzahl	44	60	72	204

Sechs dieser Geldscheine sind nicht mehr umlauffähig, darunter zwei mit einem Wert von jeweils 50 €.

a) Aus dem Behälter wird ein Geldschein zufällig entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Schein einen Wert unter 50 € hat und umlauffähig ist.

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{374}{5}}{\binom{380}{7}}$ berechnet werden kann.
Geben Sie dieses Ereignis an.

Aufgabe 7

Die Abbildung zeigt die Vierfeldertafel zu zwei stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Ermitteln Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

	B	$\overline{B}$	
A	0,18		
$\overline{A}$	0,12		
			1

Aufgabe 8

Die Abbildung zeigt die Vierfeldertafel zu zwei stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Es ist $P(A) > P(B)$. Bestimmen Sie $P(A)$.

	B	$\overline{B}$	
A	0,18		
$\overline{A}$		0,28	
			1

Aufgabe 9 (IQB 2015)

Die Flächen zweier Würfel sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet:

Würfel 1: B, B, C, C, C, C
Würfel 2: A, A, A, B, B, C

a) Würfel 1 wird zweimal geworfen. Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben B gewürfelt wird. Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße.

b) Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben C gewürfelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde.

Aufgabe 10 (IQB 2020)

An einem Fest nehmen Erwachsene und Jugendliche teil, einige der Gäste sind verkleidet. Unter allen Gästen beträgt der Anteil der verkleideten Erwachsenen 12 %, der Anteil aller Erwachsenen 60 %. Von den Jugendlichen sind 75 % verkleidet.

a) Bestimmen Sie den Anteil derjenigen, die nicht verkleidet sind, unter allen Gästen.

b) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{0{,}12}{0{,}12+0{,}75\cdot 0{,}4}$ im Sachzusammenhang.

Aufgabe 11 (Auszug aus IQB 2018)

Bei fehlerhaften Flachbildschirmen treten Fehler am häufigsten in Form eines defekten Displays sowie in Form eines defekten Netzteils auf. Für einen zufällig ausgewählten Bildschirm beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- das Display defekt ist, 10,7 %,
- weder das Display noch das Netzteil defekt ist, 87,3 %,
- entweder das Display oder das Netzteil defekt ist, 11,7 %.

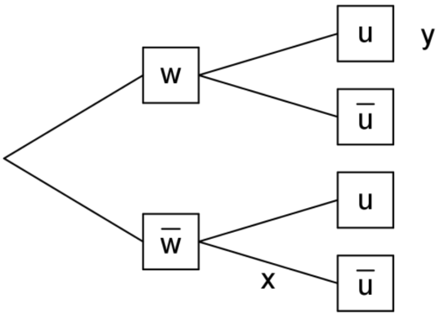
a) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

b) Untersuchen Sie, ob die beiden betrachteten Defekte unabhängig voneinander auftreten.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Bildschirm mit nicht defektem Netzteil das Display defekt ist.

Aufgabe 12 (Auszug aus IQB 2020)

In einem großen Unternehmen sind 29 % der Beschäftigten weiblich. Unter allen Beschäftigten wurde eine Befragung zur Zufriedenheit am Arbeitsplatz durchgeführt. Dabei ergab sich, dass 3,5 % der weiblichen und 10,5 % der anderen Beschäftigten unzufrieden sind.
Unter allen Beschäftigten wird eine Person zufällig ausgewählt. Das abgebildete Baumdiagramm stellt den Sachverhalt dar.



a) Ermitteln Sie die Werte von x und y.

b) Die ausgewählte Person ist an ihrem Arbeitsplatz unzufrieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie nicht weiblich ist.

c) Für eine Abteilung des Unternehmens ergab die Befragung, dass 4 % der weiblichen und 10 % der anderen Beschäftigten an ihrem jeweiligen Arbeitsplatz unzufrieden sind. Unter allen Beschäftigten dieser Abteilung ist der Anteil der unzufriedenen Beschäftigten, die nicht weiblich sind, fünfmal so groß wie der Anteil der unzufriedenen weiblichen Beschäftigten. Bestimmen Sie für diese Abteilung den Anteil der weiblichen Beschäftigten.

Aufgabe 1

a) $D = \left]-\infty; e^2\right[$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$

c) $f'(x) = \frac{1}{x-e^2}$. Es gilt: $f(0) = 2$, $f'(0) = -\frac{1}{e^2}$

Aufgabe 2

a) $D_f = \left]-\infty; 4\right]$, $W_f = \mathrm{IR}_0^+$

b) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{4-x}}$; Tangentengleichung: $y = -x + 5$; Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$

c) $A = \int_0^4 f(x)dx = \left[-\frac{4}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$; Anteil: $\frac{32}{3} : \frac{25}{2} = \frac{64}{75} \approx 85\%$

Aufgabe 3

a) $D_f = \left]-3; \infty\right[$, $W_f = \mathrm{IR}$

b) $f'(x) = \frac{2}{x+3} > 0$ für $x \in D_f$, also ist f streng monoton und damit umkehrbar.

$\bar{f}(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 3$

c) $D_{\bar{f}} = \mathrm{IR}$, $W_{\bar{f}} = \left]-3; \infty\right[$

Aufgabe 4

a) G_f entsteht, indem der Graph von g um eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach oben verschoben wird.

b) $A = 2 \cdot \int_0^1 \left(f(x) - x\right)dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

c) $f'(x) = 3 \cdot (x-1)^2$, also $f'(1) = 0$, damit besitzt G_f bei $x = 1$ eine waagrechte Tangente. Da $G_{\bar{f}}$ durch Spiegelung von G_f an der ersten Winkelhalbierenden entsteht, besitzt $G_{\bar{f}}$ bei $x = 1$ eine senkrechte Tangente. Die Größe des gesuchten Winkels ist also 90°.

Aufgabe 5

a) Nullstelle: $x_0 = -\frac{4}{3}$; $D_f = \left[-\frac{4}{3}; \infty\right[$; $W_f = \mathrm{IR}_0^+$

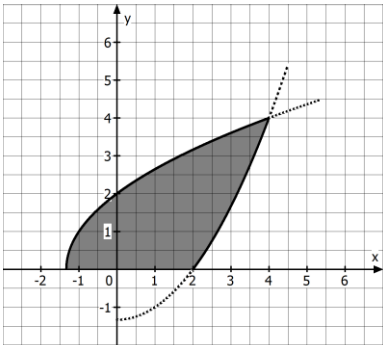
$f'(x) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{4+3x}} > 0$ für $x > -\frac{4}{3}$, also ist f streng monoton und damit umkehrbar.

b) $\sqrt{4+3x}=x$ liefert als einzige Lösung $x_1=4$, damit $P(4\,|\,4)$.
Die gesuchte Tangente geht durch Spiegelung von t an der ersten Winkelhalbierenden hervor, hat daher die Steigung $\frac{8}{3}$; Gleichung: $y=\frac{8}{3}x-\frac{20}{3}$

c) $\bar{f}(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}$; Definitionsmenge: $D_{\bar{f}}=\mathbb{R}^+$; Wertemenge: $W_{\bar{f}}=\left[-\frac{4}{3};\infty\right[$

d) $A=\int\limits_{-4/3}^{4} f(x)dx-\int\limits_{2}^{4}\bar{f}(x)dx=\left[\frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4/3}^{4}-\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{4}{3}x\right]_{2}^{4}$

$=\frac{128}{9}-\frac{32}{9}=\frac{32}{3}$



alternativ unter Ausnutzung der Symmetrie:

$A=\int\limits_{0}^{4}\left(f(x)-\bar{f}(x)\right)dx=\left[\frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{4}{3}x\right)\right]_{0}^{4}$

$=\frac{112}{9}-\frac{16}{9}=\frac{32}{3}$

Aufgabe 6

a) $\frac{176-4}{380}\approx 45{,}3\%$

b) Zufallsexperiment: Aus dem Behälter werden sieben Geldscheine zufällig entnommen.
Ereignis: Von den entnommenen Scheinen sind zwei nicht mehr umlauffähig.

Aufgabe 7

Es ist $P(B)=0{,}18+0{,}12=0{,}3$. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit gilt $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, also
$P(A)=\frac{0{,}18}{0{,}3}=0{,}6$ und damit $P(A\cap\bar{B})=0{,}6-0{,}18=0{,}42$.
Aus $P(\bar{A})=1-0{,}6=0{,}4$ folgt $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0{,}4-0{,}12=0{,}28$.

	B	$\bar{B}$	
A	0,18	0,42	0,6
$\bar{A}$	0,12	0,28	0,4
	0,3	0,7	1

alternativ:

Aus $P(B)=0{,}18+0{,}12=0{,}3$ folgt $P(\bar{B})=1-0{,}3=0{,}7$. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit gilt $\frac{P(A\cap\bar{B})}{0{,}7}=\frac{0{,}18}{0{,}3}$, also $P(A\cap\bar{B})=0{,}42$, damit $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0{,}7-0{,}42=0{,}28$.

Aufgabe 8

Mit $x=P(A\cap\bar{B})$ gilt: $P(A)=0{,}18+x$, $P(\bar{A}\cap B)=1-0{,}18-x-0{,}28=0{,}54-x$ und damit
$P(B)=0{,}18+0{,}54-x=0{,}72-x$. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit gilt
$0{,}18=(0{,}18+x)\cdot(0{,}72-x)$.

Das führt auf $x^2 - 0{,}54x + 0{,}0504 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0{,}12$ und $x_2 = 0{,}42$:
Nur x_2 erfüllt die Bedingung $P(A) > P(B)$, also ist $P(A) = 0{,}6$.

Aufgabe 9

a) $P(X=1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, $P(X=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
Erwartungswert: $\frac{4}{9} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

b) $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{1}{5}$

Aufgabe 10

a) $0{,}48 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 58\%$

b) Der Term gibt den Anteil der Erwachsenen unter allen Verkleideten an.

Aufgabe 11

a) D: „Das Display ist defekt.“
N: „Das Netzteil ist defekt.“

	D	$\overline{D}$	
N	1,0%	2,0%	3,0%
$\overline{N}$	9,7%	87,3%	97,0%
	10,7%	89,3%	100%

b) $P(D) \cdot P(N) = 0{,}107 \cdot 0{,}03 = 0{,}00321 \neq 0{,}01 = P(D \cap N)$
Die beiden Defekte treten also nicht unabhängig voneinander auf.

c) $P_{\overline{N}}(D) = \dfrac{9{,}7\%}{97{,}0\%} = 10\%$

Aufgabe 12

a) $x = 100\% - 10{,}5\% = 89{,}5\%$, $y = 0{,}29 \cdot 0{,}035 \approx 0{,}01$

b) $\dfrac{0{,}71 \cdot 0{,}105}{0{,}71 \cdot 0{,}105 + 0{,}29 \cdot 0{,}035} \approx 88{,}0\%$

c) Bezeichnet man den Anteil der weiblichen Beschäftigten mit a, so gilt:
$5 \cdot 0{,}04 \cdot a = 0{,}1 \cdot (1-a) \Leftrightarrow 0{,}2a = 0{,}1 - 0{,}1a \Leftrightarrow 0{,}3a = 0{,}1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$