Pflichtaufgaben

Bearbeiten Sie **alle** Aufgaben P1 bis P3.

P1 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f, die Abbildung 2 den Graphen einer Stammfunktion F von f.

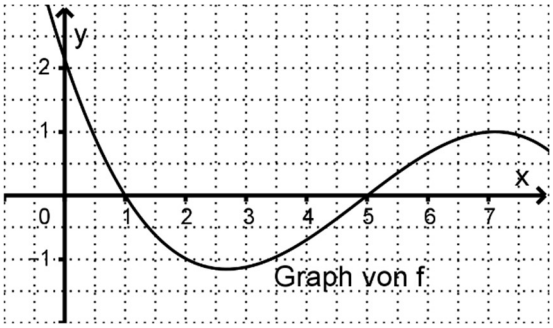


Abb. 1

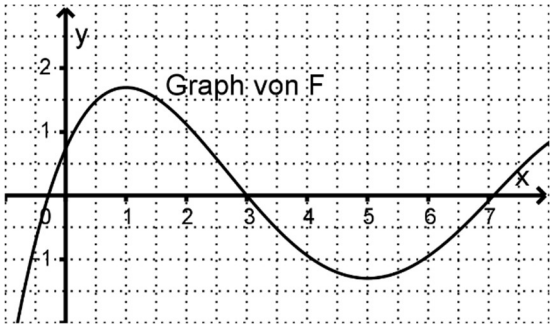


Abb. 2

a Bestimmen Sie ausschließlich mithilfe der Abbildung 2 den Wert des Terms $\int_1^5 f(x)\,dx$. (2 BE)

b Beschreiben Sie, wie man den Wert des Terms $\int_1^5 f(x)\,dx$ ausschließlich mithilfe der Abbildung 1 bestimmen könnte. (3 BE)

P2 Gegeben sind die Punkte $A(5|0|a)$ und $B(2|4|5)$. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.

a Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den A und B den Abstand 5 haben. (3 BE)

b Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den das Dreieck OAB im Punkt B rechtwinklig ist. (2 BE)

P3 In einer Region beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person Heuschnupfen hat, 15 %. Ein Allergietest ist bei einer Person, die Heuschnupfen hat, mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % positiv. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test bei einer Person positiv ist, obwohl diese Person keinen Heuschnupfen hat, beträgt 2 %.

a Bei einer zufällig ausgewählten Person wird der Allergietest durchgeführt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person keinen Heuschnupfen hat, der Test aber positiv ist. (2 BE)

b Deuten Sie den Term $\frac{0{,}15\cdot 0{,}9}{0{,}15\cdot 0{,}9+0{,}85\cdot 0{,}02}$ im Sachzusammenhang. (3 BE)

Wahlaufgaben (Block 1)

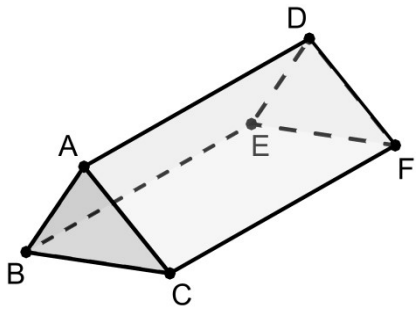
Bearbeiten Sie **eine** der Aufgaben W1 bis W3.

W1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\sin(x)+1$.

a Bestimmen Sie den Wert des Terms $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. (3 BE)

b Der Graph der Funktion g kann aus dem Graphen von f durch Strecken mit dem Faktor 0,2 in x-Richtung und Verschieben um 3 in positive y-Richtung erzeugt werden. Geben Sie einen Funktionsterm von g an. (2 BE)

W2 Betrachtet wird das Prisma ABCDEF mit $A(3\,|\,3\,|\,6)$, $B(-1\,|\,5\,|\,2)$, $C(7\,|\,4\,|\,1)$ und $E(2\,|\,23\,|\,8)$. A, B und C liegen in der Ebene $L: x_1+6x_2+2x_3=33$.



a Begründen Sie, dass das Prisma gerade ist. (2 BE)

b Die Ebene M ist parallel zu L und teilt das Prisma in zwei Teilkörper. Das Volumen des Teilkörpers, der den Punkt E enthält, ist doppelt so groß wie das Volumen des anderen Teilkörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung von M. (3 BE)

W3 Im Folgenden werden zwei Würfel stets gemeinsam geworfen. Bei jedem der beiden Würfel sind die Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

a Die beiden Würfel werden einmal geworfen. Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6“ auftritt, $\frac{25}{36}$ beträgt. (2 BE)

b Die beiden Würfel werden 36-mal geworfen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen keine „6“ auftritt. Begründen Sie für jede der folgenden Abbildungen, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt.

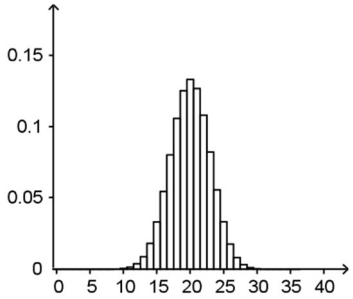


Abb. 1

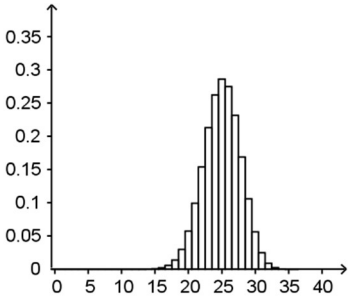


Abb.2

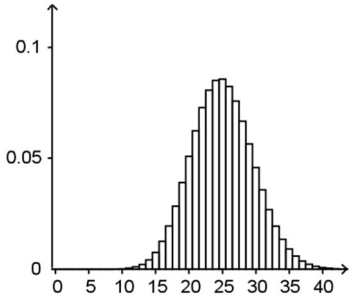


Abb. 3 (3 BE)

Wahlaufgaben (Block 2)

Bearbeiten Sie **eine** der Aufgaben W4 bis W6.

W4 Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot e^x$.

a Die Funktion f hat genau eine Extremstelle. Zeigen Sie rechnerisch, dass diese -1 ist. (2 BE)

b Der Graph einer Stammfunktion F von f verläuft durch den Koordinatenursprung. Skizzieren Sie – ausschließlich unter Verwendung des Graphen von f – den Graphen von F in der Abbildung. (3 BE)

W5 Die Abbildung in der Anlage zeigt einen Quader sowie die Ortsvektoren der Eckpunkte A, B und D. Die Grundfläche OABC des Quaders ist quadratisch.

a Beschreiben Sie die Lage des Punkts, zu dem der Ortsvektor $\frac{1}{2} \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$ gehört. (1 BE)

Der Punkt P hat den Ortsvektor $\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}$.

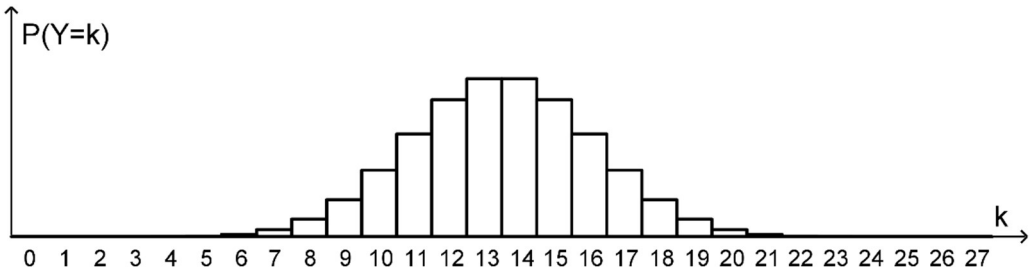
b Zeichnen Sie P in die Abbildung ein. (1 BE)

c Begründen Sie, dass der Wert des Terms $\vec{b} \circ \overrightarrow{OP}$ nur von der Seitenlänge der Grundfläche abhängt. (3 BE)

W6 **a** Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt; die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{4}$. Vervollständigen Sie die folgende Gleichung zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit:

$$P\left(X = \quad\right) = \binom{\quad}{3} \cdot \left(\quad\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$$ (2 BE)

b Die Abbildung zeigt die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße Y.



Gegeben sind die Wahrscheinlichkeitswerte $P(Y \leq 15) \approx 0{,}78$ und $P(Y = 12) \approx 0{,}13$. Berechnen Sie unter Verwendung dieser Werte den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 14)$. (3 BE)

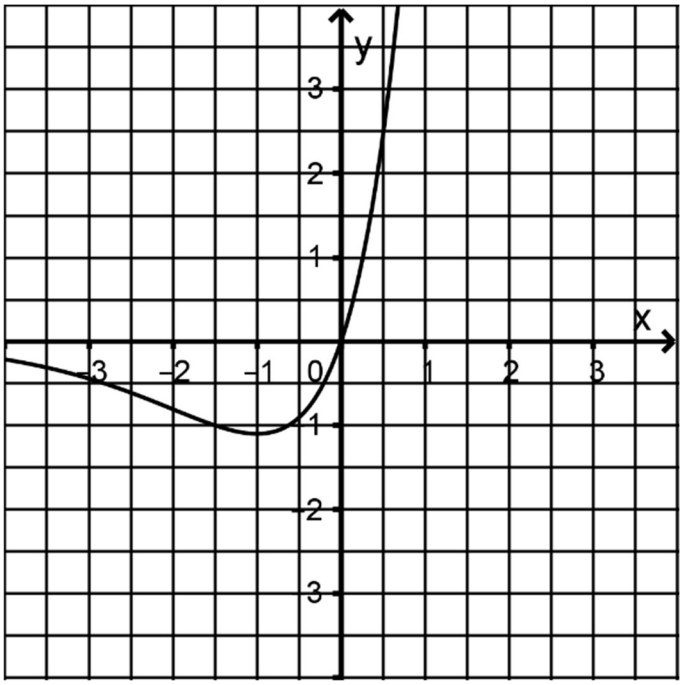
Zu- und Vorname: _____

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: Mathematik – Basisfach

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe W4



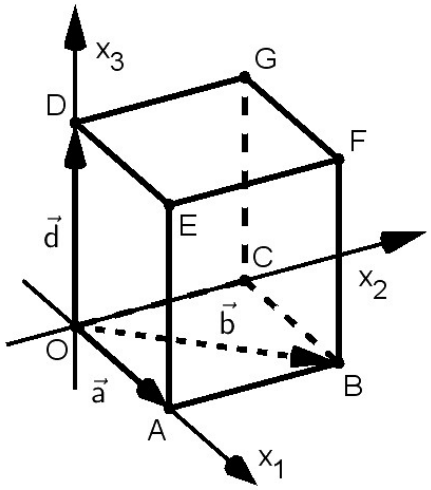
Zu- und Vorname: _____

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: Mathematik – Basisfach

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe W5



Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3$.

1 **a** Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $(12 \mid 2160)$ ein Hochpunkt des Graphen von f ist und dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0 \mid 0)$ parallel zur x-Achse verläuft. (5 BE)

b Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade g, die durch die beiden Wendepunkte des Graphen von f verläuft. Zeichnen Sie in die Abbildung eine Gerade ein, die parallel zu g ist und für $0 \le x \le 8$ mit dem Graphen von f genau einen Punkt gemeinsam hat. (7 BE)

Für jede reelle Zahl a ist eine in IR definierte Funktion h_a mit $h_a(x) = 5ax^2$ gegeben.

c Beschreiben Sie, wie der Graph von h_4 aus dem Graphen von h_3 erzeugt werden kann. (2 BE)

d Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(4 \mid f(4))$ auf dem Graphen von h_a liegt. (2 BE)

e Es gibt genau einen positiven Wert von a, für den die Graphen von f und h_a genau zwei gemeinsame Punkte haben. Ermitteln Sie diesen Wert von a. (5 BE)

f Die Gleichung $f(x) = h_{3,75}(x)$ hat genau die drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ und $x_3 = 10$ und es gilt $\int_0^{10} \left(f(x) - h_{3,75}(x)\right)dx = 0$. Deuten Sie dies mit Bezug auf die Graphen von f und $h_{3,75}$. (3 BE)

2 Ein Unternehmen lagert Glyzerin in einem Tank. Die momentane Änderungsrate des Tankinhalts kann für $0 \le x \le 20$ mithilfe der Funktion f beschrieben werden. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate in Kilogramm pro Stunde. Zu Beobachtungsbeginn befinden sich im Tank 1200 kg Glyzerin.

a Der Punkt $(4 \mid 240)$ liegt auf dem Graphen von f. Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punkts im Sachzusammenhang. (2 BE)

b Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Zwölf Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die größte Menge Glyzerin im Tank enthalten. (2 BE)

c Bestimmen Sie grafisch die Zunahme des Tankinhalts zwischen den Zeitpunkten acht Stunden und zehn Stunden nach Beobachtungsbeginn. (3 BE)

d Berechnen Sie, wie viel Glyzerin 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank enthalten ist. (4 BE)

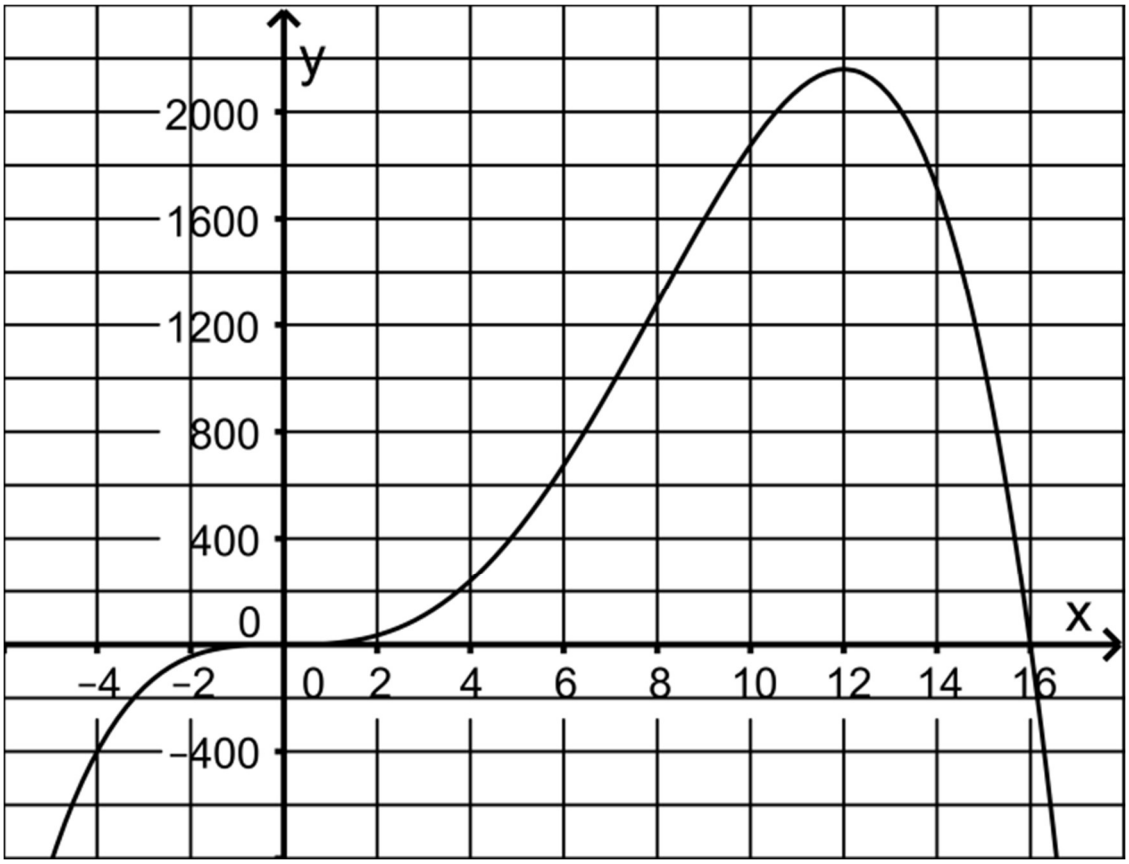
Zu- und Vorname: _____

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

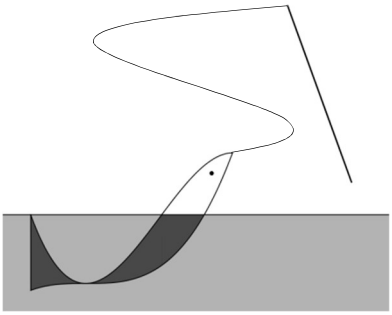
Prüfungsfach: Mathematik – Basisfach

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung



Die Abbildung zeigt das Logo eines Geschäfts für Anglerbedarf. Die obere Spitze der Schwanzflosse des Fischs liegt auf der Wasseroberfläche; die Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse steht senkrecht zur Wasseroberfläche.



Bei Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems kann die untere Begrenzungslinie des Fischs mithilfe der in IR definierten Funktion u mit $u(x) = \frac{1}{8}x^3$, die obere Begrenzungslinie mithilfe der in IR definierten Funktion v mit $v(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (4 - x)$ beschrieben und die Wasseroberfläche durch die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{5}{4}$ dargestellt werden.

a Zeigen Sie, dass

- die Graphen von u und v nur die Punkte $P(0\,|\,0)$ und $Q\left(\frac{8}{3}\,\middle|\,\frac{64}{27}\right)$ gemeinsam haben;
- $v'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von v ist. (5 BE)

b Weisen Sie nach, dass der Punkt Q ein Extrempunkt des Graphen von v ist, und geben Sie die Art dieses Extrempunkts an. (3 BE)

c Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Für jeden Wert von $x \in \left]0; \frac{8}{3}\right[$ ist die Steigung des Graphen von v größer als die Steigung des Graphen von u. (3 BE)

d Die Ausdehnung des Fischs in y-Richtung beträgt $\frac{539}{216}$. Ermitteln Sie damit die Ausdehnung des Fischs in x-Richtung.

(zur Kontrolle: Die Ausdehnung in x-Richtung beträgt $\frac{11}{3}$.) (5 BE)

e Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schwanzflosse des Fischs. (3 BE)

f Bezeichnet man die Lösung der Gleichung $v(x) = \frac{5}{4}$ für $0 < x \le \frac{8}{3}$ mit x_1 und die Lösung der Gleichung $u(x) = \frac{5}{4}$ mit x_2, so ist der Wert des Terms

$$\int_{-1}^{x_1} \left(v(x) - u(x)\right)dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{5}{4} - u(x)\right)dx$$

die Lösung einer Aufgabe im vorliegenden Sachzusammenhang. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und beschreiben Sie die Bedeutung der beiden Integrale im Zusammenhang mit der Aufgabe.

(5 BE)

Das Logo des Geschäfts soll verändert werden. Für die obere Begrenzungslinie des Fischs wird weiterhin die Funktion v verwendet. Die untere Begrenzungslinie jedoch soll anstelle von u mithilfe einer anderen der in IR definierten Funktionen u_k mit $u_k(x) = \frac{1}{8}k \cdot x^3$ mit $k > 0$ beschrieben werden. Der gemeinsame Punkt der Graphen von u_k und v, der die x-Koordinate $\frac{8}{k+2}$ hat, stellt die Kopfspitze dar.

g Weisen Sie nach, dass die x-Achse für alle Werte von k Tangente an den Graphen von u_k in dessen Wendepunkt ist. (3 BE)

h Bestimmen Sie, wie der Wert von k gewählt werden müsste, damit die Ausdehnung der Schwanzflosse in y-Richtung $\frac{3}{2}$ beträgt. (4 BE)

i Die Graphen von u_k und v schließen mit der Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse jeweils einen Winkel ein. Für einen Wert von k sind die beiden Winkel gleich groß. Prüfen Sie, ob die Kopfspitze für diesen Wert von k oberhalb der Wasseroberfläche liegt. (4 BE)

Die Eckpunkte eines Holzkörpers werden durch $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(10|10|0)$, $D(0|10|0)$ und $E(0|10|6)$ dargestellt (vgl. Abbildung in der Anlage). Die Punkte B, D und E liegen im Modell in der Symmetrieebene des Körpers. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter in der Realität.

a Zeigen Sie, dass das Dreieck BCE rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Holzkörpers. (5 BE)

b Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene L, in der das Dreieck BCE liegt, in Koordinatenform. (3 BE)

c Die quadratische Grundfläche des Holzkörpers schließt mit der Seitenfläche, die durch das Dreieck BCE dargestellt wird, einen Winkel ein. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels. (2 BE)

d Der Holzkörper soll mit einer möglichst kurzen Linie versehen werden, die im Modell vom Eckpunkt A über die Kante BE zum Punkt C verläuft. Die Länge dieser Linie in Zentimetern kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$P(10-10t\,|\,10t\,|\,6t)$$
$$\overrightarrow{PC} \circ \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow t = \tfrac{25}{59}$$
$$2 \cdot \left|\overrightarrow{PC}\right| \approx 15{,}2$$

Erläutern Sie dieses Vorgehen. (4 BE)

Der Schnittpunkt der Ebene L mit der x_3-Achse wird mit F bezeichnet.

e Zeichnen Sie F sowie die Geraden, in denen L die x_1x_3- und die x_2x_3-Ebene schneidet, in die Abbildung ein. (2 BE)

f Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Körpers ABCDEF größer ist als das Volumen des Körpers ABCDE, ohne für diese Volumina konkrete Werte zu berechnen. (4 BE)

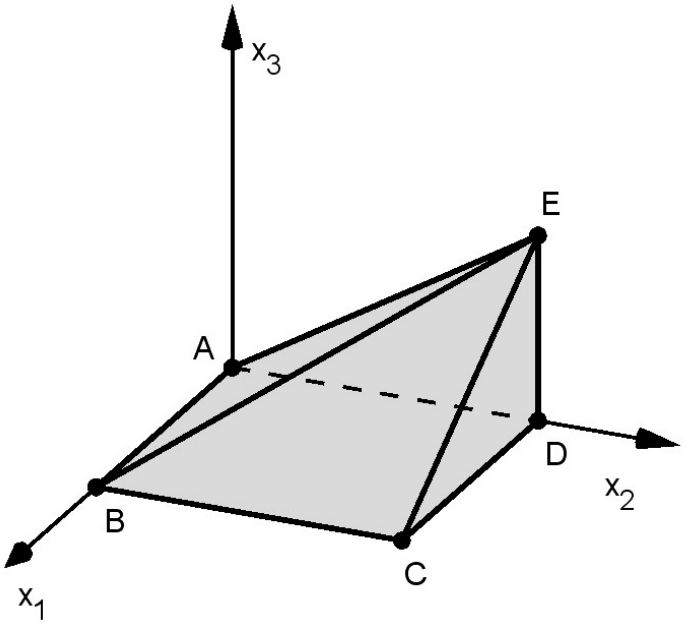
Zu- und Vorname: _____

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

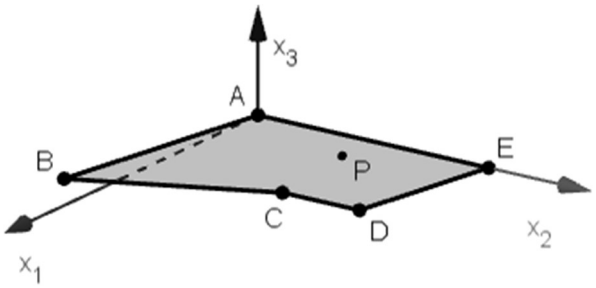
Prüfungsfach: Mathematik – Basisfach

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe II 1



Die Punkte $A(0|0|0)$, $B(18|0|1{,}5)$, $C(12|10|1)$, $D(12|15|1)$ und $E(0|15|0)$ stellen modellhaft die Eckpunkte einer ebenen Rasenfläche dar (vgl. Abbildung). Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$ sind parallel. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.



a Zeigen Sie, dass auch die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CD}$ parallel sind und dass die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$ einen rechten Winkel einschließen. (3 BE)

b Ausgehend vom Ansatz $\left|\overline{AE}\right| \cdot \left|\overline{DE}\right| + \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{DE}\right|\right) \cdot \left(\left|\overline{AE}\right| - \left|\overline{CD}\right|\right)$ kann eine Größe berechnet werden, die im betrachteten Sachzusammenhang eine Rolle spielt. Nennen Sie diese Größe und erläutern Sie den gegebenen Ansatz. (4 BE)

Die Rasenfläche wird von einem Roboter gemäht, der die Form eines flachen Zylinders hat. Zur Beschreibung der Bewegung des Roboters wird der Mittelpunkt seiner kreisförmigen Unterseite betrachtet, die einen Radius von 20 cm hat. Es soll vereinfachend davon ausgegangen werden, dass dieser Mittelpunkt die Rasenfläche berührt.
Die Position des Mittelpunkts wird zunächst durch $P(3{,}6|8|0{,}3)$ dargestellt (vgl. Abbildung).
Die anschließende Bewegung des Mittelpunkts verläuft im Modell entlang der

Gerade g, die durch P verläuft und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat. Dabei bewegt sich

der Roboter auf den durch $\overline{BC}$ dargestellten Rand der Rasenfläche zu.

c Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts Q, in dem g die Strecke $\overline{BC}$ schneidet.

(zur Kontrolle: Q(15,6 | 4 | 1,3)) (5 BE)

d Weisen Sie nach, dass der Winkel, unter dem sich der Roboter dem Rand der Rasenfläche nähert, etwa 41° groß ist. (3 BE)

e Der Roboter ändert seine Richtung, sobald der Rand seiner Unterseite den Rand der Rasenfläche erreicht. Der Punkt, der die Position des Mittelpunkts im Moment der Richtungsänderung darstellt, wird mit S bezeichnet. Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Skizze die Koordinaten von S. (5 BE)

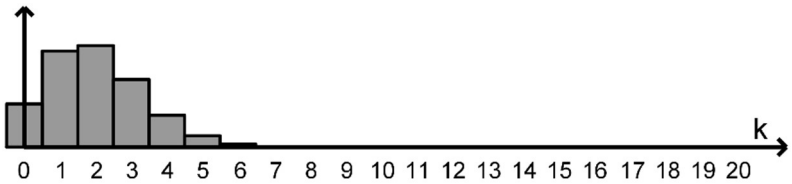
Ein Unternehmen bietet Joghurt in Bechern an. Die Becher werden auf Paletten mit jeweils 20 Bechern ausgeliefert. Bei jedem Becher befindet sich auf der Unterseite des Deckels genau eines von sechs verschiedenen Motiven.
Gegenwärtig wird für jeden Becher eines der sechs Motive zufällig ausgewählt. Drei Becher werden nacheinander geöffnet.

a Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nur im ersten und dritten Becher jeweils das Motiv 1 befindet. (2 BE)

b Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$ angegeben wird. (2 BE)

Das Unternehmen plant eine Änderung. Künftig soll für jeden Becher das Motiv 6 mit der Wahrscheinlichkeit p ausgewählt werden. Die Zufallsgröße X gibt für eine Palette die Anzahl der Becher mit dem Motiv 6 an.

c Die Abbildung zeigt für einen Wert von p die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.



Beurteilen Sie jede der beiden folgenden Aussagen:

I Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich auf einer Palette weniger als zwei Becher mit dem Motiv 6 befinden, ist größer als 50 %.

II Der Wert von p ist größer als $\frac{1}{6}$. (4 BE)

Nach der Änderung wird für jeden Becher das Motiv 6 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die anderen fünf Motive ausgewählt werden, stimmen überein.

d Geben Sie jeweils einen Wert von m und n an, sodass mit dem Term $m \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^n + \left(\frac{35}{36}\right)^{40}$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Sachzusammenhang berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis. (4 BE)

e Kunden können für gesammelte Motive Prämien gewinnen. Der Tabelle können die Kosten entnommen werden, die dem Unternehmen dadurch entstehen.

Motiv	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit für die Auswahl						$\frac{1}{36}$
Kosten pro Becher	4 Cent	4 Cent	2 Cent	2 Cent	2 Cent	9 Cent

Berechnen Sie die mittleren Kosten pro Becher, die dem Unternehmen durch die Prämien entstehen. (4 BE)

f Bei einem Fünftel aller Becher ist das Motiv farbig gedruckt, bei den anderen Bechern schwarz-weiß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einem zufällig ausgewählten Becher mit einem schwarz-weiß gedruckten Motiv das Motiv 6 befindet, beträgt $\frac{1}{48}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Becher mit einem farbigen Motiv das Motiv 6 enthält. (4 BE)

Bei einem Smartphone-Spiel kann jeder Spieler jeden Sonntag Sterne gewinnen. Dazu hat er jeweils zehn Versuche. Bei jedem Versuch kann nur ein Stern gewonnen werden; die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 40 %.

a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei zehn Versuchen mehr als sechs Sterne gewinnt. (2 BE)

b Beurteilen Sie die folgende Aussage eines Spielers:

„Ich habe an den letzten drei Sonntagen jeweils acht Sterne gewonnen. Daher ist meine Chance, an diesem Sonntag wieder acht Sterne zu gewinnen, deutlich kleiner als vorher.“ (2 BE)

c An einem Sonntag nutzen vier Spieler jeweils die möglichen zehn Versuche zum Gewinnen von Sternen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei zwei der vier Spieler jeweils fünf Sterne gewinnen. (3 BE)

d Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Versuch einen Stern zu gewinnen, wird geändert. Anschließend beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zehn Versuchen höchstens drei Sterne zu gewinnen, etwa 62 %. Ermitteln Sie die geänderte Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Versuch einen Stern zu gewinnen, auf ganze Prozent genau. (3 BE)

Außerdem hat jeder Spieler täglich einmal die Möglichkeit, allein durch Starten des Spiels Bonuspunkte zu erhalten. Durch das Starten wird ihm automatisch eine zufällig bestimmte Anzahl von Bonuspunkten gutgeschrieben. Der Tabelle können die möglichen Anzahlen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnommen werden.

Bonuspunkte	10	20	50
Wahrscheinlichkeit	50 %	40 %	10 %

e Ein Spieler startet das Spiel an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler von Tag zu Tag weniger Bonuspunkte erhält. (2 BE)

f Ein Spieler startet das Spiel an vier Tagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler dabei insgesamt 80 Bonuspunkte erhält. (4 BE)

g Die Wahrscheinlichkeiten für 10 und 20 Bonuspunkte werden so geändert, dass die Spieler im Zeitraum von 200 Tagen, an denen das Spiel gestartet wird, im Mittel 3000 Bonuspunkte erhalten. Ermitteln Sie die beiden geänderten Wahrscheinlichkeiten. (4 BE)

P1

a $F(5) - F(1) \approx -1{,}3 - 1{,}7 = -3$ (2 BE)

b Man könnte die Anzahl der Kästchen bestimmen, die der Graph von f für $1 \le x \le 5$ mit der x-Achse einschließt. Multipliziert man die Anzahl der Kästchen mit 0,25 und mit -1, so erhält man den gesuchten Wert. (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2		II		I	I		1	1	
b	3	I			I		II	2	1	

P2

a $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25 + (5-a)^2} = 5 \Leftrightarrow a = 5$ (3 BE)

b $\overrightarrow{OB} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{pmatrix} = 35 - 5a = 0 \Leftrightarrow a = 7$ (2 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3		I			II		2	1	
b	2		II			I		1	1	

P3

a $0{,}85 \cdot 0{,}02 = 0{,}017$ (2 BE)

b Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine zufällig ausgewählte Person, bei der der Test positiv ist, tatsächlich Heuschnupfen hat. (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I		I	I	2		
b	3	II		II	II		II		3	

W1

a $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx + \int_0^{2\pi} 1\,dx = 0 + 2\pi = 2\pi$ (1 BE)

b $\sin(5x) + 4$ (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3					II		2	1	
b	2	II			II		I	1	1	

W2

a $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, d. h. die Seite BE steht senkrecht zur Grundfläche des Prismas. (2 BE)

b $M: x_1 + 6x_2 + 2x_3 = b$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$, d. h. der Punkt $(0\,|\,11\,|\,4)$ liegt in M. Damit ergibt sich $b = 74$. (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	II			I	I		1	1	
b	3		II			II	I	1	2	

W3

a Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der beiden Würfel keine „6“ zeigt, ist $\frac{5}{6}$.
Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel keine „6“ zeigen,
$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. (2 BE)

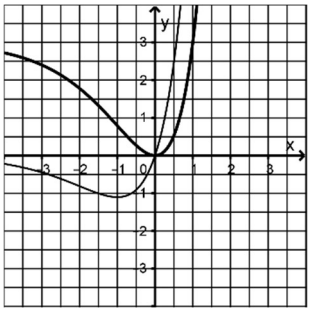
b Abb. 1: Die höchste Säule befindet sich bei 20, nicht bei 25.
Abb. 2: Die Summe der Höhen der Säulen ist größer als 1.
Abb. 3: Die Höhe der Säule bei 37 ist größer als null. (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I		I		I	I	2		
b	3	II			II	I		1	2	

W4

a $f'(x) = 3e^x + 3x \cdot e^x,\ f'(-1) = 0$ (2 BE)

b



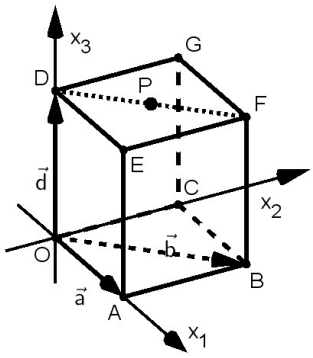
(3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2		I			II		1	1	
b	3	III	II		III					3

W5

a Der Punkt ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OC}$. (1 BE)

b



(1 BE)

c $\vec{b} \circ \overrightarrow{OP} = \vec{b} \circ \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{b} \circ \vec{b}\right) + \vec{b} \circ \vec{d} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{b}\right|^2$

Die Länge des Vektors $\vec{b}$ hängt nur von der Seitenlänge der Grundfläche ab. (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1				II		I		1	
b	1				I			1		
c	3	III	III			II				3

W6

a $P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$ (2 BE)

b Mit $P(Y=15)=P(Y=12)$ ergibt sich:

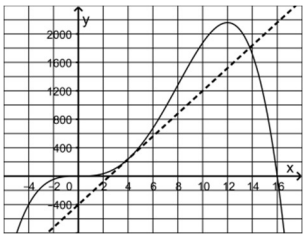
$P(Y=14)=P(Y\leq 15)-P(Y=15)-P(Y\leq 13)\approx 0{,}78-0{,}13-0{,}5=0{,}15$ (3 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	II			II	I			2	
b	3	III	III		II	I				3

1 **a** $f'(x) = -\frac{5}{4}x^3 + 15x^2$, $f''(x) = -\frac{15}{4}x^2 + 30x$

Wegen $f(12) = 2160$, $f'(12) = 0$ und $f''(12) = -180 < 0$ ist $(12 \mid 2160)$ ein Hochpunkt.
Wegen $f'(0) = 0$ verläuft die beschriebene Tangente parallel zur x-Achse. (5 BE)

b



$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(-\frac{15}{4}x + 30\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

Mit $f(0) = 0$ und $f(8) = 1280$ ergibt sich $y = 160x$.

(7 BE)

c Der Graph von h_4 kann aus dem Graphen von h_3 durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ erzeugt werden. (2 BE)

d $h_a(4) = f(4) \Leftrightarrow 5a \cdot 16 = 240 \Leftrightarrow a = 3$ (2 BE)

e $f(x) = h_a(x) \Leftrightarrow -\frac{5}{16}x^4 + 5x^3 = 5ax^2 \Leftrightarrow -\frac{5}{16}x^2 \cdot \left(x^2 - 16x + 16a\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8 \pm \sqrt{64 - 16a}$

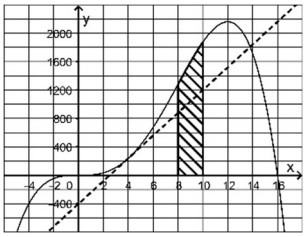
$64 - 16a = 0 \Leftrightarrow a = 4$ (5 BE)

f Die Graphen von f und $h_{3,75}$ haben genau drei gemeinsame Punkte und schließen zwei Flächenstücke gleichen Inhalts ein, die auf verschiedenen Seiten des Graphen von $h_{3,75}$ liegen. (3 BE)

2 **a** Vier Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Änderungsrate des Tankinhalts 240 kg pro Stunde. (2 BE)

b Die Aussage ist falsch, da die momentane Änderungsrate nach dem Zeitpunkt zwölf Stunden nach Beobachtungsbeginn zunächst positiv ist. (2 BE)

c



Der Tankinhalt nimmt um etwa $8 \cdot 2 \cdot 200\,\text{kg} = 3200\,\text{kg}$ zu.

(3 BE)

d $\int_0^{20} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{16}x^5 + \frac{5}{4}x^4\right]_0^{20} = 0$, d. h. 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn

befinden sich im Tank 1200 kg Glyzerin. (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	I				I		X		
b	7		II		I	II			X	
c	2	II			I		I		X	
d	2		I			I		X		
e	5	III	III			II				X
f	3	III			II		III			X
2 a	2			I			I	X		
b	2	II		II	II		I		X	
c	3		I	I	I	I		X		
d	4	II		II		II			X	

a
- $u(x)=v(x) \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3=-\frac{1}{4}x^3+x^2 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2\cdot\left(x-\frac{8}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{8}{3}; u(0)=0,\ u\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{27}$
- Mit $v(x)=-\frac{1}{4}x^3+x^2$ ergibt sich $v'(x)=-\frac{3}{4}x^2+2x$. (5 BE)

b $v''(x)=-\frac{3}{2}x+2$

Es gilt $v'\left(\frac{8}{3}\right)=0$ und $v''\left(\frac{8}{3}\right)<0$, d. h. Q ist Hochpunkt des Graphen von v. (3 BE)

c Die Aussage ist falsch.
Begründung: Mit $u'(x)=\frac{3}{8}x^2$ ergibt sich $v'(2)=1<\frac{3}{2}=u'(2)$. (3 BE)

d Für die y-Koordinate der unteren Spitze der Schwanzflosse ergibt sich $\frac{64}{27}-\frac{539}{216}=-\frac{1}{8}$. Mit $u(x)=-\frac{1}{8} \Leftrightarrow x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1$ ergibt sich für die Ausdehnung in x-Richtung $1+\frac{8}{3}=\frac{11}{3}$. (5 BE)

e $\int_{-1}^{0}\left(v(x)-u(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2-\frac{3}{8}x^3\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{32}x^4\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}+\frac{3}{32}=\frac{41}{96}$ (3 BE)

f Aufgabenstellung: Bestimmen Sie den Flächeninhalt des dunkelgrau markierten Teils des Fischs.
Beschreibung: Die Werte der Integrale sind die Inhalte der Flächen, die der Graph von u mit dem Graphen von v sowie den Geraden mit den Gleichungen $x=-1$ und $x=x_1$ bzw. mit der Gerade mit der Gleichung $y=\frac{5}{4}$ sowie den Geraden mit den Gleichungen $x=x_1$ und $x=x_2$ einschließt. (5 BE)

g Der Wendepunkt des Graphen von u_k ist $(0\,|\,0)$. Mit $u_k'(x)=\frac{3}{8}k\cdot x^2$ ergibt sich $u_k'(0)=0$. (3 BE)

h $u_k(-1)=\frac{5}{4}-\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{8}k=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow k=2$ (4 BE)

i $v'(-1)=-\frac{11}{4}$

$u_k'(-1)=\frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{8}k=\frac{11}{4} \Leftrightarrow k=\frac{22}{3}$

$u_{\frac{22}{3}}\left(\frac{8}{\frac{22}{3}+2}\right)=\frac{198}{343}<\frac{5}{4}$, d. h. die Kopfspitze liegt nicht oberhalb der Wasseroberfläche. (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	5					I		X		
b	3	I				I		X		
c	3	II	II		II	I			X	
d	5	II	II	I	I	I			X	
e	3			I	I	II			X	
f	5	III	III	II	II		II			X
g	3					I		X		
h	4		II	I	I	I			X	
i	4	III	III	I		II				X

a $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

$10^2 + 10 \cdot \left|\overrightarrow{CE}\right| + 10 \cdot 6 = 160 + 10 \cdot \sqrt{136} \approx 277$, d. h. der Inhalt der Oberfläche beträgt etwa $277\,\text{cm}^2$. (5 BE)

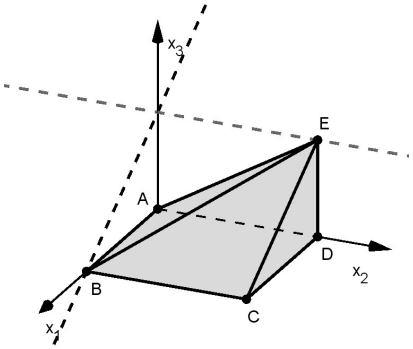
b $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} + r \cdot \overrightarrow{CB} + s \cdot \overrightarrow{CE}$ liefert $x_1 = 10 - 10s$, $x_2 = 10 - 10r$ und $x_3 = 6s$.

Damit ergibt sich $x_1 = 10 - \frac{5}{3} x_3$. (3 BE)

c $\tan\varphi = \frac{\left|\overline{DE}\right|}{\left|\overline{CD}\right|} = \frac{6}{10}$, d. h. $\varphi \approx 31°$ (2 BE)

d Bezeichnet man im Modell denjenigen Punkt der gesuchten Linie, der auf $\overline{BE}$ liegt, mit P, so ist die Länge der Linie aufgrund der Symmetrie des Körpers $2 \cdot \left|\overrightarrow{PC}\right|$. Da die Linie möglichst kurz sein soll, steht $\overrightarrow{PC}$ senkrecht zu $\overrightarrow{PB}$. (4 BE)

e



(2 BE)

f Volumen des Körpers ABCDE: $V = \frac{1}{3} \cdot \left|\overline{AB}\right|^2 \cdot \left|\overline{DE}\right|$

Volumen des Körpers ABCDEF: $\frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right|^2 \cdot \left|\overline{DE}\right| = \frac{3}{2} \cdot V = V + 50\,\% \cdot V$ (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	5			I	I	I		X		
b	3					II			X	
c	2			I	II	I			X	
d	4	III		II	III		II			X
e	2				I		I	X		
f	4	II			I	I			X	

a $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \circ \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ (3 BE)

b Ausgehend vom gegebenen Ansatz kann der Inhalt der Rasenfläche berechnet werden.

Im Modell kann die Fläche zerlegt werden in ein Rechteck mit den Seitenlängen $\left|\overrightarrow{AE}\right|$ und $\left|\overrightarrow{DE}\right|$ sowie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen $\left|\overrightarrow{AB}\right| - \left|\overrightarrow{DE}\right|$ und $\left|\overrightarrow{AE}\right| - \left|\overrightarrow{CD}\right|$ haben. (4 BE)

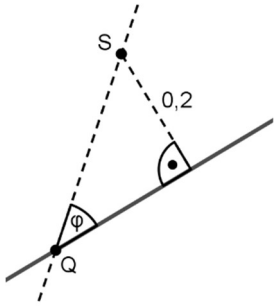
c $\begin{pmatrix} 3,6 \\ 8 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem:

I $12\lambda + 6\mu = 14,4$ II $4\lambda + 10\mu = 8$ III $\lambda + 0,5\mu = 1,2$

Aus I und II ergibt sich $48\lambda = 48 \Leftrightarrow \lambda = 1$ und damit $Q(15,6 \mid 4 \mid 1,3)$. (5 BE)

d $\cos\varphi = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -0,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{36 + 100 + 0,25} \cdot \sqrt{144 + 16 + 1}}$ liefert $\varphi \approx 41°$. (3 BE)

e



$\left|\overrightarrow{QS}\right| = \frac{0,2}{\sin\varphi}$

$\begin{pmatrix} 15,6 \\ 4 \\ 1,3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{144+16+1}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left|\overrightarrow{QS}\right| \approx \begin{pmatrix} 15,3 \\ 4,1 \\ 1,3 \end{pmatrix}$ (5 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I				I		X		
b	4	I		I	I		I	X		
c	5		I			II			X	
d	3			I		II	I		X	
e	5		III	II	II	III	II			X

a $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$ (2 BE)

b Die drei Becher enthalten drei unterschiedliche Motive. (2 BE)

c Die Aussage I ist falsch, da der Anteil des Flächeninhalts der beiden Säulen zu $k < 2$ am Flächeninhalt aller dargestellten Säulen nicht größer als 50 % ist.

Die Aussage II ist falsch, da für $p > \frac{1}{6}$ wegen $\frac{1}{6} \cdot 20 \approx 3{,}3$ die Säule zu $k = 2$ nicht die höchste wäre. (4 BE)

d $m = 40$, $n = 39$

Ereignis: Auf zwei Paletten befinden sich mindestens 39 Becher, die nicht das Motiv 6 enthalten. (4 BE)

e $\frac{7}{36} \cdot (2 \cdot 4\,\text{ct} + 3 \cdot 2\,\text{ct}) + \frac{1}{36} \cdot 9\,\text{ct} \approx 3{,}0\,\text{ct}$ (4 BE)

f $\frac{1}{5} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow x = 5 \cdot \left(\frac{1}{36} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{48}\right) = \frac{1}{18}$ (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I		I	I	X		
b	2	II		II	II		I		X	
c	4	II		I	II		II		X	
d	4	II		II	II		I		X	
e	4		I	I	I	I	I	X		
f	4		III	II		I				X

a X: Anzahl der gewonnenen Sterne

$P_{0,4}^{10}(X > 6) \approx 5\,\%$ (2 BE)

b Die Aussage ist falsch, da die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Stern zu gewinnen, bei allen Versuchen gleich groß ist. (2 BE)

c $P_{0,4}^{10}(X = 5) \approx 0,20$

Y: Anzahl der Spieler, die fünf Sterne gewinnen

$P_{0,20}^{4}(Y = 2) \approx 15\,\%$ (3 BE)

d $P_{0,32}^{10}(X \leq 3) \approx 59,6\,\%$, $P_{0,31}^{10}(X \leq 3) \approx 62,3\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit müsste also etwa 31 % betragen. (3 BE)

e $0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 2\,\%$ (2 BE)

f $4 \cdot 0,1 \cdot 0,5^3 + 0,4^4 \approx 8\,\%$ (4 BE)

g $x \cdot 10 + (0,9 - x) \cdot 20 + 0,1 \cdot 50 = \frac{3000}{200} \Leftrightarrow -10x = -8 \Leftrightarrow x = 0,8$, d. h. die geänderte Wahrscheinlichkeit für 10 Bonuspunkte beträgt 80 %, die für 20 Bonuspunkte 10 %. (4 BE)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I		I		X		
b	2	I		I			I	X		
c	3		II	II		I			X	
d	3		II	I		I			X	
e	2			I	I	I	I	X		
f	4	I	II	II	I	I			X	
g	4		III	II		II	II			X