Baden-Württemberg
REGIERUNGSPRÄSIDIUM STUTTGART
SCHULE UND BILDUNG

Anforderungen in Geometrie

in der Sekundarstufe I

anhand von „IQB-Aufgaben“

2023

Die folgende Zusammenstellung liefert eine Übersicht über grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten im Bereich der Geometrie, welche die Schülerinnen und Schüler mit Blick auf die Abiturprüfung am Gymnasium benötigen. Sie soll eine Hilfe bei der Orientierung hinsichtlich der unterrichtlichen Priorisierung in der nachpandemischen Schulsituation darstellen. Selbstverständlich ist der Bildungsplan in Gänze Grundlage für den Unterricht. Im Bestreben, einen erfolgreichen Verlauf der Schullaufbahn der Schülerinnen und Schüler zu erreichen, soll das Folgende als Hinweis für eine Priorisierung im Sinne einer Schwerpunkt- bzw. „Leichtpunkt“setzung für den Unterricht verstanden werden.

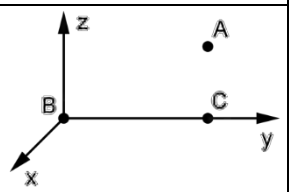
Für die schriftliche Abiturprüfung ab dem Jahr 2024 werden in Mathematik mindestens 50% der Aufgaben unverändert aus dem ländergemeinsamen Aufgabenpool („IQB-Aufgaben“) übernommen.
Eine Grundüberlegung für die vorliegende Zusammenstellung war daher, für die Lehrkraft auf den ersten Blick erkennbar zu machen, welche Aufgaben(teile) der bisher bekannten „IQB-Aufgaben“ auf grundlegendem Niveau bereits vor Eintritt in die Kursstufe im Unterricht oder in Klassenarbeiten als mögliche Aufgabenstellungen behandelt werden sollen bzw. können.

In Anlehnung an die entsprechende Zusammenstellung für die Stochastik steht zu Beginn des Papiers ein tabellarischer Überblick, der den Items inhaltsbezogener Kompetenzen der Leitideen `Messen´ sowie `Raum und Form´ aus dem Bildungsplan der Klassenstufen 7/8 bzw. 9/10 gegebenenfalls exemplarische IQB-Aufgabenstellungen zuordnet.
Im Unterschied zur Stochastik ist allerdings festzuhalten, dass es zu früh ist, originäre IQB-Aufgaben im Unterricht der Standardstufe 8 zu thematisieren. Der in der Tabelle ausgewiesene Bezug zu Items der Standardstufe 8 ist also als Voraussetzung für die spätere erfolgreiche Bearbeitung entsprechender Aufgaben zu verstehen.
Zum Lösen der Aufgaben, die in der Tabelle der Klassenstufen 9/10 aufgeführt sind, werden hingegen keine inhaltsbezogenen Kompetenzen des Bildungsplans der Kursstufe benötigt.

Das Papier stellt dabei die vollständige Aufgabensammlung aller veröffentlichten Aufgaben aus dem ländergemeinsamen Pool auf grundlegendem Niveau aus dem Bereich der Geometrie bis 2023 bereit. Bei jeder Aufgabenstellung wird dabei der konkrete Bildungsplanbezug zum Bildungsplan 2016 der Standardstufe 9/10 hergestellt. Diese Kennzeichnung zeigt, in welchem Zusammenhang die Aufgabe(nstellung) Eingang in den Unterricht der Sekundarstufe I finden kann. Ebenfalls ist mit einem Blick erkennbar, was erst in der Kursstufe zu behandeln ist.

Klassenstufen 7/8

I. Geometrische Figuren untersuchen

Bildungsplanbezug	**Aufgaben auf grundlegendem Niveau, deren erfolgreiche Bearbeitung auch Grundfertigkeiten aus der SEK I voraussetzen**
3.2.3 (1) Winkelweiten unter Verwendung von Scheitel- und Nebenwinkeln sowie Stufen- und Wechselwinkeln erschließen.	Die Landephase [eines Hubschraubers] beginnt im Modell im Punkt $H_L(7{,}76 \mid 41{,}77 \mid 0{,}25)$. Der Hubschrauber bewegt sich während seiner Landephase (…) geradlinig auf die horizontale Landefläche (…) zu, die im Modell durch den Punkt $L(8 \mid 43{,}2 \mid 0{,}06)$ dargestellt wird. Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Flugbahn während der Landephase gegenüber der Horizontalen. IQB B 2018 CAS 1 f
3.2.3 (2) den Winkelsummensatz für Dreiecke **begründen**	**zur Schulung prozessbezogener Kompetenzen mit Blick auf die Kursstufe hilfreich**
3.2.3 (3) Winkelweiten und Streckenlängen durch Anwenden des Winkelsummensatzes oder des Basiswinkelsatzes beziehungsweise dessen Kehrsatz erschließen	Für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bilden die Punkte $A(7 \mid 3 \mid 0)$, $B(5 \mid 3 \mid 4)$ und $C_t(5+2t \mid 3 \mid 4+t)$ ein Dreieck. Bestimmen Sie alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind. IQB A 2018 2.1 b
3.2.3 (4) den Satz des Thales begründen und anwenden, insbesondere auf Orthogonalität schließen	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\|4\|2)$, $B(0\|0\|0)$ und $C(0\|4\|0)$ gegeben (vgl. Abbildung). (…) Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte, die von A, B und C den gleichen Abstand haben.  IQB A 2019 2.1 b
3.2.3 (5) die **Konstruierbarkeit** von Dreiecken unter Verwendung der Dreiecksungleichung und des Winkelsummensatzes **beurteilen** sowie die **Lösungsvielfalt** bei Dreieckskonstruktionen **untersuchen**	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**

3.2.3 (6) Streckenlängen und Winkelweiten in ebenen Figuren und Körpern durch maßstäbliches Zeichnen erschließen	In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1\|1\|2)$, $B(-1\|5\|2)$ und $C(-4\|3\|3)$ gegeben. Das Dreieck ABC stellt modellhaft ein Sonnensegel dar (…). Der horizontale Untergrund wird durch die x_1x_2-Ebene beschrieben. Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Auf das Segel trifft Sonnenlicht. Die zu den beiden unteren Eckpunkten des Segels gehörenden Eckpunkte seines Schattens auf dem Untergrund werden durch $A'(-5\|3\|0)$ und $B'(-5\|7\|0)$ dargestellt. Stellen Sie den Schatten des Segels in der x_1x_2-Ebene grafisch dar und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt. IQB B 2020 WTR 1 e

II. Ortslinien konstruieren und mit Ortslinien arbeiten

Bildungsplanbezug	Aufgaben auf grundlegendem Niveau, deren erfolgreiche Bearbeitung auch Grundfertigkeiten aus der SEK I voraussetzen
3.2.3 (7) die Mittelsenkrechte einer Strecke, die Winkelhalbierende eines Winkels mit Zirkel und Lineal **konstruieren**	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**
3.2.3 (8) geometrische Probleme unter Verwendung von Ortslinien (Kreislinie, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelparallele, Thaleskreis) zeichnerisch lösen, auch mit dynamischer Geometriesoftware, und die Lösung beschreiben	Gegeben sind der Punkt $P(-3\|2\|1)$, die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ sowie für eine reelle Zahl a der Punkt $Q(0\|a\|0)$. Die Strecke $\overline{PQ}$ steht senkrecht zu g. Zwei Werte r_1 und r_2 des Parameters r liefern die Ortsvektoren zweier Punkte R_1 und R_2 der Geraden g. Geben Sie alle Wertepaare $(r_1;r_2)$ an, für die R_1 und R_2 den gleichen Abstand vom Punkt Q haben. Begründen Sie Ihre Angabe. IQB A 2017 2.1 b
3.2.3 (9) den Umkreismittelpunkt und den Inkreismittelpunkt eines Dreiecks mit Zirkel und Lineal **konstruieren** und die Konstruktion begründen	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**

3.2.3 (10) Tangenten an Kreise in Punkten auf dem Kreis und von Punkten außerhalb konstruieren	Die Abbildung zeigt ein Gebäude des Flughafens von Palma de Mallorca. Im eingezeichneten kartesischen Koordinatensystem kann die (…) Dachkonstruktion modellhaft durch einen halben Zylinder und drei Prismen zusammengesetzt werden (…).  Hinter dem Gebäude startet ein Flugzeug. Ab einer bestimmten Höhe über der Startbahn ist die Flugzeugspitze von der Position der Kamera aus oberhalb des Gebäudes sichtbar. Im Folgenden soll diese Höhe ermittelt werden. Begründen Sie anhand einer geeignet beschrifteten Skizze, dass diejenigen Punkte der Dachkonstruktion, die am höchsten über dem Boden des Gebäudes liegen, für die Ermittlung der gesuchten Höhe keine Rolle spielen. IQB B 2019 CAS 2 e

III. Mit zentrischer Streckung und den Strahlensätzen arbeiten

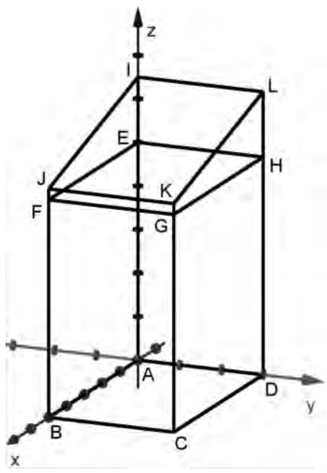
Bildungsplanbezug	**Aufgaben auf grundlegendem Niveau, deren erfolgreiche Bearbeitung auch Grundfertigkeiten aus der SEK I voraussetzen**
3.2.3 (11) durch zentrische Streckung (auch negativer Streckfaktor) Figuren **maßstäblich vergrößern** und verkleinern	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**
3.2.3 (12) Streckenlängen unter Nutzung der Strahlensätze bestimmen	In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS mit $A(0\|0\|0)$, $B(5\|0\|0)$, $C(5\|5\|0)$ und $D(0\|5\|0)$ sowie der Spitze $S(2{,}5\|2{,}5\|3{,}9)$ gegeben. Die Pyramide stellt modellhaft ein geschlossenes Zelt dar, das auf horizontalem Untergrund steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Auf einem Teil des Zeltbodens hat ein 1,20 m großes Kind die Möglichkeit, aufrecht zu stehen. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Anteil des Flächeninhalts dieses Teils am Flächeninhalt des gesamten Zeltbodens. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen anhand einer geeignet beschrifteten Skizze. IQB B 2017 CAS 2 g

3.2.3 (13) die Nichtumkehrbarkeit des zweiten Strahlensatzes durch Angabe eines Gegenbeispiels begründen	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**

Klassenstufen 9/10

I. Größen bei Figuren und Körpern berechnen

Bildungsplanbezug	Aufgaben auf grundlegendem Niveau, die bereits mit Grundfertigkeiten aus der SEK I bearbeitet werden können
3.3.2 (1) erklären, wie Flächeninhalt und Umfang eines Kreises mithilfe eines Grenzprozesses bestimmt werden	**zur Schulung prozessbezogener Kompetenzen mit Blick auf die Kursstufe hilfreich**
3.3.2 (2) Winkelweiten sowohl im Grad- als auch im Bogenmaß angeben und nutzen	**Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung von Aufgaben, auch in der Analysis**
3.3.2 (3) die Länge von Kreisbögen und den Flächeninhalt von Kreisausschnitten bestimmen	**bisher liegt hierzu keine IQB-Aufgabe auf grundlegendem Niveau vor, aber** z.B. eN IQB B Sto 2020 WTR 1 3 a
3.3.2 (4) die Formeln zur Berechnung von Mantelflächeninhalten (Kegel, Zylinder) **herleiten**	**zur Schulung prozessbezogener Kompetenzen mit Blick auf die Kursstufe hilfreich**
3.3.2 (5) die Formeln für das Volumen von Pyramide, Kegel und Kugel **durch Plausibilitätsbetrachtung erläutern**	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**

3.3.2 (6) die Formel für das Volumen eines schiefen Körpers mit der Idee des Satzes von Cavalieri **anschaulich erklären**	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**
3.3.2 (7) den Oberflächeninhalt und das Volumen von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel berechnen	In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7. Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe. IQB A 2015 1.1 b
3.3.2 (8) Oberflächeninhalte und Volumina bei zusammengesetzten Körpern bestimmen	Ein Haus kann modellhaft durch den abgebildeten Körper ABCDIJKL dargestellt werden. Das Dachgeschoss des Hauses entspricht dabei dem Prisma EFGHIJKL; der Teilkörper ABCDEFGH ist ein Quader. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\|0\|0)$, $G(10\|6\|10)$, $H(0\|6\|10)$ $K(10\|6\|10{,}5)$ und $L(0\|6\|13)$ gegeben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Berechnen Sie das Volumen des Hauses.  IQB B 2019 WTR 2 a

II. Längen in kartesischen Koordinatensystemen berechnen

Bildungsplanbezug	Aufgaben auf grundlegendem Niveau, die bereits mit Grundfertigkeiten aus der SEK I bearbeitet werden können
3.3.2 (9) den Abstand zweier Punkte bestimmen	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\|2\|2)$, $B(4\|-1\|z_B)$ und $C(-3\|y_C\|6)$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Abstand von A und C mindestens 5 beträgt. IQB A 2019 1.1 b

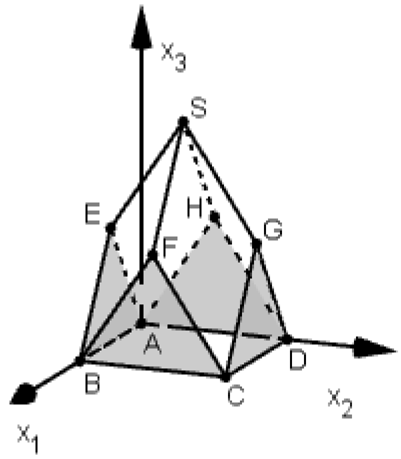
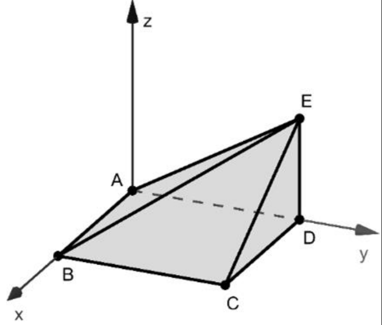
3.3.2 (10) den Betrag eines Vektors berechnen und als Länge deuten	In einem kartesischen Koordinatensystem [ist der Punkt] $A(0\|4\|2)$ (…) gegeben (…). Eine Gerade g verläuft durch A und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts, der auf g liegt und von A den Abstand 6 hat. IQB A 2019 2.1 a

III. Körper zeichnerisch darstellen

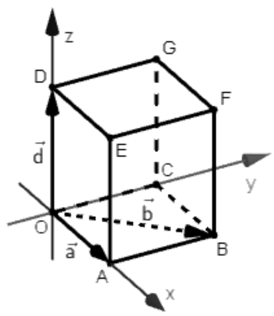
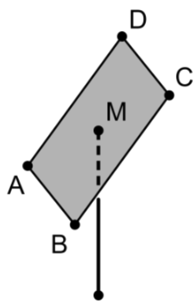
Bildungsplanbezug	Aufgaben auf grundlegendem Niveau, die bereits mit Grundfertigkeiten aus der SEK I bearbeitet werden können
3.3.3 (1) Schrägbilder und Netze (von Prismen, Pyramiden, Zylindern und Kegeln) skizzieren und die Darstellungsformen ineinander überführen	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**

IV. Geometrische Zusammenhänge beweisen und mit trigonometrischen Beziehungen arbeiten

Bildungsplanbezug	Aufgaben auf grundlegendem Niveau, die bereits mit Grundfertigkeiten aus der SEK I bearbeitet werden können
3.3.3 (2) zwei gegebene Figuren mithilfe der jeweiligen Definition auf Ähnlichkeit und Kongruenz untersuchen 3.3.3 (3) Dreiecke mithilfe ausgewählter Ähnlichkeitsätze (Übereinstimmung in den Längenverhältnissen aller Seiten, Übereinstimmung in zwei Winkelweiten) auf Ähnlichkeit überprüfen	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**

3.3.3 (4) unter Nutzung des Satzes des Pythagoras Streckenlängen berechnen beziehungsweise mithilfe seines Kehrsatzes auf Orthogonalität schließen	Betrachtet wird die Pyramide ABCS. Ihre Grundfläche ist das rechtwinklige Dreieck ABC; die Hypotenuse $\overline{AB}$ ist 5 cm lang, die Kathete $\overline{AC}$ 4 cm. Die Kante $\overline{CS}$ steht senkrecht zur Grundfläche und hat eine Länge von 7 cm. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. IQB A 2020 1.3 a
3.3.3 (5) geometrische Zusammenhänge unter Verwendung bereits bekannter Sätze sowie mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen und Kongruenzsätzen erschließen, begründen und beweisen, und Größen berechnen	Die Abbildung zeigt modellhaft das Dach eines Kirchturms. Die Eckpunkte der dreieckigen Giebelflächen (grau markiert) und der viereckigen Dachflächen werden durch die Punkte A, $B(8\|0\|0)$, $C(8\|8\|0)$, D, $E(4\|0\|6)$, $F(8\|4\|6)$, $G(4\|8\|6)$, H und $S(4\|4\|12)$ dargestellt. Die vier Dachflächen haben die gleiche Form und die gleiche Größe. (…)  Die Gerade q_1 verläuft durch S und F, die Gerade q_2 durch S und G. Die beiden Geraden schneiden die x_1x_2-Ebene in den Punkten Q_1 bzw. Q_2. Geben Sie das Verhältnis des Abstands von Q_1 und Q_2 zum Abstand von F und G an. Begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von Q_1 und Q_2 zu berechnen. IQB B 2022 WTR 2
3.3.3 (6) Streckenlängen und Winkelweiten unter Nutzung der Längenverhältnisse Sinus, Kosinus, Tangens bestimmen	Die Eckpunkte eines Holzkörpers werden durch $A(0\|0\|0)$, $B(10\|0\|0)$, $C(10\|10\|0)$, $D(0\|10\|0)$ und $E(0\|10\|6)$ dargestellt (vgl. Abbildung). (…) Die quadratische Grundfläche des Holzkörpers schließt mit der Seitenfläche, die durch das Dreieck BCE dargestellt wird, einen Winkel ein. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels.  IQB B 2021 WTR 1 c
3.3.3 (7) die Beziehungen $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$, $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ **herleiten**	**Leichtpunkt für den Unterricht im Hinblick auf \`dauerhaft wachzuhalten´**

V. Mit geometrischen Objekten in kartesischen Koordinatensystemen umgehen

Bildungsplanbezug	**Aufgaben auf grundlegendem Niveau, die bereits mit Grundfertigkeiten aus der SEK I bearbeitet werden können**
3.3.3 (8) Vektoren in Tupeldarstellung entsprechend ihrer Verwendung geometrisch als Punkt oder Verschiebung interpretieren	Die Abbildung zeigt einen Quader sowie die Ortsvektoren der Eckpunkte A, B und D. Die Grundfläche OABC des Quaders ist quadratisch. Beschreiben Sie die Lage des Punkts, zu dem der Ortsvektor $\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$ gehört. Der Punkt P hat den Ortsvektor $\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$. Zeichnen Sie P in die Abbildung ein.  IQB A 2021 2.1 a, b
3.3.3 (9) Punkte in das Schrägbild eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems eintragen	In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS mit $A(0\|0\|0)$, $B(5\|0\|0)$, $C(5\|5\|0)$ und $D(0\|5\|0)$ sowie der Spitze $S(2{,}5\|2{,}5\|3{,}9)$ gegeben. Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein. IQB B 2017 CAS 2 a
3.3.3 (10) den Mittelpunkt einer Strecke berechnen	Die Punkte $A_1(5{,}5\|-5{,}5\|6)$, $B_1(5{,}5\|5{,}5\|6)$,(…), $A_2(2\|-2\|8{,}1)$, $B_2(2\|2\|8{,}1)$, (…) sind (…) Eckpunkte (…). Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_1 und M_2 der Seiten A_1B_1 bzw. A_2B_2 an. IQB B 2017 WTR 1 c
3.3.3 (11) Vektoren auf Kollinearität untersuchen	[Gegeben sind die] Punkte $A(0\|0\|0)$, $B(18\|0\|1{,}5)$, $C(12\|10\|1)$, $D(12\|15\|1)$ und $E(0\|15\|0)$ (…). Zeigen Sie, dass (…) $\overline{AE}$ und $\overline{CD}$ parallel sind (…). IQB B 2021 WTR 2 a
3.3.3 (12) Geraden und Strecken vektoriell mithilfe von Parametergleichungen beschreiben	Solarmodule werden auf einem Trägergestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird modellhaft durch das Rechteck ABCD dargestellt, der Befestigungspunkt des Metallrohrs am Trägergestell durch den Punkt $M(-2\|4\|3)$ (vgl. Abbildung).  Im Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund, auf dem das Metallrohr steht; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke darstellen. Geben Sie eine Gleichung dieser Strecke an. IQB B 2017 B WTR 2 f

3.3.3 (13) die Lagebeziehung von Geraden untersuchen und gegebenenfalls den Schnittpunkt bestimmen	Gegeben sind die Punkte $P(2\|0\|1)$ und $Q(2\|4\|9)$ sowie die parallelen Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass g und h nicht identisch sind. IQB A 2022 1.3 a
3.3.3 (14) geradlinige Bewegungen vektoriell beschreiben	Ein Logistikunternehmen testet auf einer Strecke zwischen Festland und einer Insel die Paketzustellung mithilfe (…), einer (…) Drohne. In einem kartesischen Koordinatensystem wird das horizontale Gelände, über dem sich die Drohne bewegt, modellhaft durch die x_1x_2-Ebene dargestellt, die Lage des Startplatzes durch den Punkt $S(7320\|-1750\|0)$ und die Lage des regulären Landeplatzes durch den Punkt $L(-990\|6990\|0)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Die Drohne soll über dem Startplatz zunächst vertikal aufsteigen, bis sie eine Höhe von 50 m erreicht hat, und anschließend geradlinig in konstanter Höhe und mit konstanter Geschwindigkeit in die Richtung des Landeplatzes fliegen. Begründen Sie, dass die vorgesehene horizontale Flugbahn der Drohne im Modell entlang der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ verläuft. 100 Sekunden nachdem die Drohne die Höhe von 50 m erreicht hat, wird ihre Position durch den Punkt $P(6489\|-876\|50)$ dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der die Position der Drohne nach weiteren 200 Sekunden Flugzeit auf der vorgesehenen Flugbahn darstellt. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne während des horizontalen Flugs. IQB B 2019 CAS 1 a, b, c
3.3.3 (15) Geraden mithilfe von Spurpunkten im Schrägbild eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems veranschaulichen	**bisher liegt hierzu keine IQB-Aufgabe vor**

IQB-Aufgaben
grundlegendes Niveau
Teil A

2015 – 1.1

	BE
In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.	
a Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.	2
b Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.	3
	5

Erwartungshorizont

a $A(5|0|0)$, $B(5|5|0)$, $C(0|5|0)$, $D(0|0|0)$, $S(2{,}5|2{,}5|7)$

b Möglichkeit 1:
$S(2{,}5|2{,}5|28)$
Die Höhe der Pyramide ist – bei unveränderter Grundfläche – viermal so groß.

Möglichkeit 2:
$A(20|0|0)$, $B(20|5|0)$
Der Flächeninhalt der Grundfläche ist – bei unveränderter Höhe – viermal so groß.

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (8)
b) 3.3.2 (7)

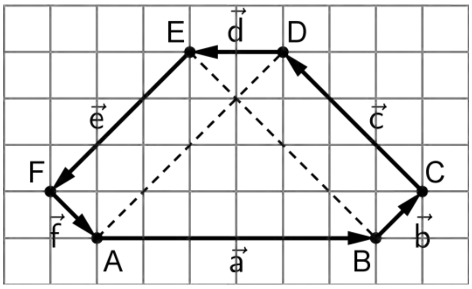
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2		X	X				II			I	
b	3		X	X			II	II			I	

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

<u>2015 – 1.2</u>

BE

Im abgebildeten Sechseck ABCDEF sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.



a Stellen Sie die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar. 2

$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \qquad \vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$

b Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{FB}$ mithilfe von drei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar. 1

c Der Punkt A hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ wird mit M bezeichnet. Der Punkt $K(2|0|8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von B. 2

5

<u>Erwartungshorizont</u>

a $\vec{x} = \overrightarrow{BE}$, $\vec{y} = \overrightarrow{FE}$

b $\overrightarrow{FB} = \vec{f} - \vec{e} - \vec{c}$

c $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 4 \cdot \overrightarrow{AK}$, $B(-10|-6|44)$

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (8)
b) 3.3.3 (8)
c) 3.3.3 (8) und 3.3.3 (12)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2			X						I		
b	1			X				II		II		
c	2	X		X				II			I	

2015 – 2.1

	BE
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1\|2\|5)$, $B(2\|7\|8)$ und $C(-3\|2\|4)$ gegeben.	
a Weisen Sie nach, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.	2
b Für jede reelle Zahl a ist ein Punkt $D_a\left(a\,\|\,2+a\sqrt{2}\,\|\,5+\sqrt{2}\right)$ gegeben. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Strecke von A nach D_a die Länge 2 hat.	3
	5

Erwartungshorizont

a
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AB}\neq\lambda\cdot\overrightarrow{AC}\text{ für alle }\lambda\in\mathrm{IR}$$

b
$$\overrightarrow{AD_a}=\begin{pmatrix}a-1\\a\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \left|\overrightarrow{AD_a}\right|=2\Leftrightarrow 3a^2-2a-1=0\Leftrightarrow a=-\tfrac{1}{3}\vee a=1$$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (11)
b) 3.3.2 (10), 3.3.3 (8)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	X		X			II				I	
b	3	X	X	X				III			III	

<u>2017 – 1.1</u>

	BE
Gegeben sind die Punkte $A(-2\,|\,1\,|\,-2)$, $B(1\,|\,2\,|\,-1)$ und $C(1\,|\,1\,|\,4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d\,|\,1\,|\,4)$.	
a Zeigen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind, und geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der dieses Dreieck liegt.	3
b Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d.	2
	5

Erwartungshorizont

a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \neq r \cdot \overrightarrow{AC}$ für alle $r \in \mathbb{R}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$, $s, t \in \mathbb{R}$

b $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (d-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{1}{3}$

Bildungsplan BW – & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (11) erster Teil

Nicht Standardstufe 10: a) zweiter Teil, b)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	3	X		X			II				I	
b	2	X		X			II	II			II	

2017 – 1.2

	BE
Gegeben ist das Quadrat ABCD mit $A(3\,|\,3\,|\,4)$, $B(6\,|\,7\,|\,4)$, $C(2\,|\,10\,|\,4)$ und $D(-1\,|\,6\,|\,4)$. Das Quadrat liegt in der Ebene mit der Gleichung $z=4$.	
a Weisen Sie nach, dass das Quadrat den Flächeninhalt 25 besitzt.	2
b Es gibt Punkte S, für die die Pyramide ABCDS das Volumen 50 hat. Bestimmen Sie die z-Koordinate eines dieser Punkte.	3
	5

Erwartungshorizont

a $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \sqrt{25}^2 = 25$

b $\frac{1}{3}\cdot 25\cdot h = 50 \Leftrightarrow h = 6$

mögliche z-Koordinate: 10

Bildungsplan BW – & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (9)
b) 3.3.2 (7)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	X	X	X				I			I	
b	3	X	X	X			II	II			II	

2017 – 2.1

	BE
Gegeben sind der Punkt $P(-3\,|\,2\,|\,1)$, die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ sowie für eine reelle Zahl a der Punkt $Q(0\,|\,a\,|\,0)$. Die Strecke $\overline{PQ}$ steht senkrecht zu g.	
a Bestimmen Sie den Wert von a.	2
b Zwei Werte r_1 und r_2 des Parameters r liefern die Ortsvektoren zweier Punkte R_1 und R_2 der Geraden g. Geben Sie alle Wertepaare $(r_1; r_2)$ an, für die R_1 und R_2 den gleichen Abstand vom Punkt Q haben. Begründen Sie Ihre Angabe.	3
	5

Erwartungshorizont

a $\overrightarrow{PQ} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3 + 3 \cdot (a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 1$

b Wertepaare: $(b; -b)$ mit $b \in \mathbb{R}$
Da die Strecke $\overline{PQ}$ senkrecht zu g steht, haben zwei Punkte R_1 und R_2 genau dann den gleichen Abstand von Q, wenn Sie den gleichen Abstand von P haben. Da $\overrightarrow{OP}$ für $r = 0$ die Gleichung von g erfüllt, haben R_1 und R_2 für $r_1 = b$ und $r_2 = -b$ für alle $b \in \mathbb{R}$ den gleichen Abstand von Q.

Bildungsplan BW – & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: b) 3.3.3 (12)

Nicht Standardstufe 10: a)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	X		X			II	II			II	
b	3	X		X			III	III				II

2018 – 1.1

	BE
Gegeben sind die Punkte $A(1\mid 1\mid -1)$, $B(3\mid -5\mid 2)$ und C. Für die Ortsvektoren von A und C gilt $\overrightarrow{OC} = 2\cdot\overrightarrow{OA}$.	
a Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$.	2
b Begründen Sie, dass es genau eine Ebene gibt, die A, B und C sowie den Koordinatenursprung enthält.	3
	5

Erwartungshorizont

a $\overline{AC} = \overline{OA} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

b Da $\overrightarrow{OC} = 2\cdot\overrightarrow{OA}$ gilt, liegen A, C und der Koordinatenursprung auf einer Gerade. Wegen $\overrightarrow{OB} \neq \lambda\cdot\overrightarrow{OA}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, enthält diese Gerade nicht den Punkt B.

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (9)

Nicht Standardstufe 10: b)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich[2]		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X	X	X			I	I			I		2		
b	3	X		X			II	II			II			3	

[2] Für jede Teilaufgabe wird zu jedem Anforderungsbereich die Anzahl der Bewertungseinheiten eingetragen, die dem Anforderungsbereich zuzuordnen sind.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil A liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig von Anforderungsniveau und Aufgabengruppe – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Aufgabengruppe 1 Anzahl der BE	1 - 2	3 - 4	—	2 - 3	2 - 3	—
Aufgabengruppe 2 Anzahl der BE	0 - 1	0 - 2	3 - 4	0 - 1	1 - 2	3

2018 – 1.2

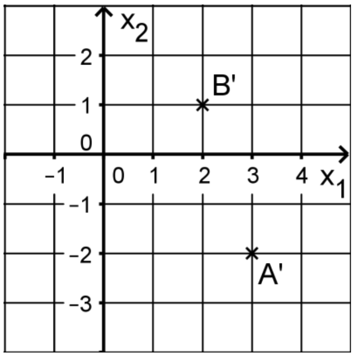
BE

Die Punkte $A(3\,|-2\,|\,1)$, $B(2\,|\,1\,|\,1)$ und $C(0\,|-0{,}5\,|\,1)$ sind die Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(1\,|-1{,}5\,|\,5)$.

a Begründen Sie, dass die Grundfläche der Pyramide parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Geben Sie die Höhe der Pyramide an. 2

b Verschiebt man die Punkte A und B parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene, so ergeben sich die Punkte A' bzw. B', die in der Abbildung dargestellt sind. 3

Entscheiden Sie mithilfe geeigneter Ergänzung der Abbildung, ob der Fußpunkt der Höhe der Pyramide ABCS innerhalb oder außerhalb ihrer Grundfläche liegt.



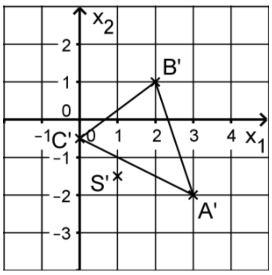
5

Erwartungshorizont

a Die x_3-Koordinaten von A, B und C stimmen überein.

Die Höhe der Pyramide ist 4.

b Der Fußpunkt der Höhe liegt außerhalb der Grundfläche.



Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (8)
b) 3.3.3 (9)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X	X	X			I				I		2		
b	3	X		X			II			II		I	1	2	

2018 – 2.1

	BE
Für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bilden die Punkte $A(7\,|\,3\,|\,0)$, $B(5\,|\,3\,|\,4)$ und $C_t(5+2t\,|\,3\,|\,4+t)$ ein Dreieck.	
a Zeigen Sie, dass jedes dieser Dreiecke bei B einen rechten Winkel hat.	2
b Bestimmen Sie alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind.	3
	5

Erwartungshorizont

a $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = 4t - 4t = 0$

b $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC_t}\right| \Leftrightarrow \sqrt{20} = \sqrt{5t^2} \Leftrightarrow t = -2 \vee t = 2$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: b) 3.3.2 (9)

Nicht Standardstufe 10: a)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2		X	X							II			2	
b	3	X	X	X			III	III			II				3

2019 – 1.1

	BE
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\,|\,2\,|\,2)$, $B(4\,|\,-1\,|\,z_B)$ und $C(-3\,|\,y_C\,|\,6)$ gegeben.	
a B liegt auf der Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\0{,}75\\-2\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Wert von z_B.	2
b Zeigen Sie, dass der Abstand von A und C mindestens 5 beträgt.	3
	5

Erwartungshorizont

a	$0 - r = 4 \Leftrightarrow r = -4$, d. h. $z_B = 2 + 8 = 10$.
b	$\overline{AC} = \sqrt{9 + (y_C - 2)^2 + 16}$ Wegen $(y_C - 2)^2 \geq 0$, beträgt der Abstand von A und C mindestens $\sqrt{9+16} = 5$.

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (12)
b) 3.3.2 (9)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X							I		2		
b	3	X	X	X			II	II			II			3	

2019 – 1.2

	BE
In einem kartesischen Koordinatensystem wird das gerade Prisma ABCDEF betrachtet. $A(0\,\|\,-4\,\|\,0)$, $B\left(\sqrt{20}\,\|\,0\,\|\,0\right)$ und $C(0\,\|\,4\,\|\,0)$ sind die Eckpunkte der Grundfläche.	
a Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC im Punkt B nicht rechtwinklig ist.	2
b Der Inhalt der Mantelfläche des Prismas ist 60. Bestimmen Sie die Höhe des Prismas.	3
	5

Erwartungshorizont

a
$$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-\sqrt{20}\\-4\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-\sqrt{20}\\4\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}=20-16\neq 0$$

b
$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix},\ \left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)\cdot h=(6+6+8)\cdot h=60\Leftrightarrow h=3$$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: b) 3.3.2 (9), 3.3.2 (10), 3.3.2 (7)

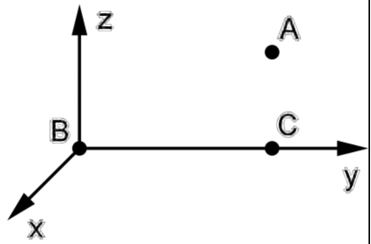
Nicht Standardstufe 10: a)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X	X	X			I				I		2		
b	3	X	X	X				II			I		1	2	

2019 – 2.1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|4|2)$, $B(0|0|0)$ und $C(0|4|0)$ gegeben (vgl. Abbildung). Eine Gerade g verläuft durch A und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



a Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts, der auf g liegt und von A den Abstand 6 hat. 2

b Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte, die von A, B und C den gleichen Abstand haben. 3

5

Erwartungshorizont

a $\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Damit: $(-4|6|6)$

b Das Dreieck ABC ist in C rechtwinklig. C liegt also auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, d. h. der Mittelpunkt $M(0|2|1)$ von $\overline{AB}$ hat von A, B und C den gleichen Abstand. Alle weiteren Punkte mit dieser Eigenschaft liegen auf der Lotgerade zur yz-Ebene durch M, beispielsweise der Punkt $(1|2|1)$.

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

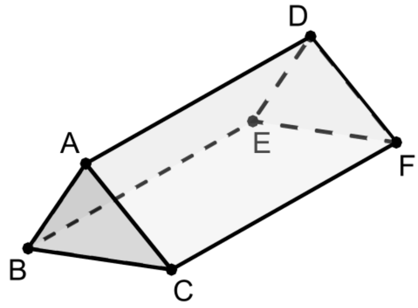
Standardstufe 10: a) 3.3.3 (12), 3.3.2 (10)
b) 3.3.2 (9), 3.3.3 (5), 3.3.3 (10)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X	X	X										2	
b	3	X		X			III	III				II			3

2020 – 1.2

BE

Betrachtet wird das Prisma ABCDEF mit $A(3|3|6)$, $B(-1|5|2)$, $C(7|4|1)$ und $E(2|23|8)$. A, B und C liegen in der Ebene $L: x+6y+2z=33$.



a Begründen Sie, dass das Prisma gerade ist. 2

b Die Ebene M ist parallel zu L und teilt das Prisma in zwei Teilkörper. Das Volumen des Teilkörpers, der den Punkt E enthält, ist doppelt so groß wie das Volumen des anderen Teilkörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung von M. 3

5

Erwartungshorizont

a $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, d. h. die Seite $\overline{BE}$ steht senkrecht zur Grundfläche des Prismas.

b $M: x+6y+2z=b$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$, d. h. der Punkt $(0|11|4)$ liegt in M. Damit ergibt sich $b=74$.

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10:

Nicht Standardstufe 10: a), b)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	II			I	I		1	1	
b	3		II			II	I	1	2	

2020 – 1.3

BE

Betrachtet wird die Pyramide ABCS. Ihre Grundfläche ist das rechtwinklige Dreieck ABC; die Hypotenuse $\overline{AB}$ ist 5 cm lang, die Kathete $\overline{AC}$ 4 cm. Die Kante $\overline{CS}$ steht senkrecht zur Grundfläche und hat eine Länge von 7 cm.

a Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. 3

b Die Pyramide soll in einem Koordinatensystem dargestellt werden, in dem eine Längeneinheit 1 cm entspricht. Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an. 2

5

Erwartungshorizont

a $\overline{BC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 14$, d. h. die Pyramide hat ein Volumen von $14\,\text{cm}^3$.

b $A(4|0|0)$, $B(0|3|0)$, $C(0|0|0)$, $S(0|0|7)$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (7), 3.3.3 (4)
b) 3.3.3 (9)

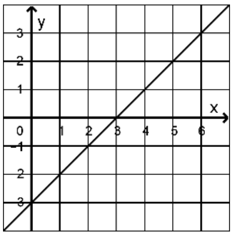
Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	3		II			I	I	2	1	
b	2		II				I	1	1	

2021 – 1.2

	BE
Das Gleichungssystem I $-x + y = -3$ II $2x - 2y = 6$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ hat unendlich viele Lösungen.	
a Stellen Sie diese Lösungen in einem Koordinatensystem grafisch dar. Geben Sie die Lösung mit $y = 1$ an.	3
b Im gegebenen Gleichungssystem wird die Gleichung II durch die folgende Gleichung mit $a, b \in \mathbb{R}$ ersetzt: II* $a \cdot x - 3y = b$ Geben Sie einen Wert von a und einen Wert von b an, für die das aus I und II* bestehende Gleichungssystem keine Lösung hat. Begründen Sie ihre Angabe.	2
	5

Erwartungshorizont

a Für $y = 1$ gilt $x = 4$.



b $a = 3$, $b = -3$

Begründung: $3 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II}^*$ liefert $0 = -12$.

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 8: a) 3.2.1 (20), 3.2.1 (26)
b) 3.2.1 (25)

Teil-aufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	3				I	I		3		
b	2	II	II		II				2	

2021 – 1.3

	BE
Gegeben sind die Punkte $A(5\,|\,0\,|\,a)$ und $B(2\,|\,4\,|\,5)$. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.	
a Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den A und B den Abstand 5 haben.	3
b Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den das Dreieck OAB im Punkt B rechtwinklig ist.	2
	5

Erwartungshorizont

a

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+(5-a)^2} = 5 \Leftrightarrow a = 5$$

b

$$\overrightarrow{OB} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{pmatrix} = 35 - 5a = 0 \Leftrightarrow a = 7$$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (9)

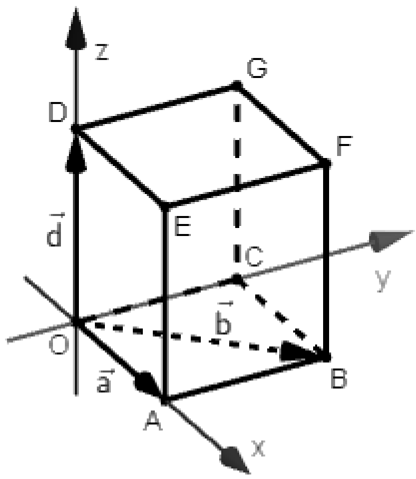
Nicht Standardstufe 10: b)

Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	3		I			II		2	1	
b	2		II			I		1	1	

2021 – 2.1

BE

Die Abbildung zeigt einen Quader sowie die Ortsvektoren der Eckpunkte A, B und D. Die Grundfläche OABC des Quaders ist quadratisch.



a Beschreiben Sie die Lage des Punkts, zu dem der Ortsvektor $\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$ gehört. 1

Der Punkt P hat den Ortsvektor $\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$.

b Zeichnen Sie P in die Abbildung ein. 1

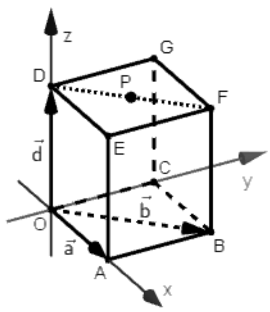
c Begründen Sie, dass der Wert des Terms $\vec{b}\circ\overrightarrow{OP}$ nur von der Seitenlänge der Grundfläche abhängt. 3

5

Erwartungshorizont

a Der Punkt ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OC}$.

b



c $\vec{b}\circ\overrightarrow{OP}=\vec{b}\circ\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{b}\circ\vec{b}\right)+\vec{b}\circ\vec{d}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{b}\right|^2$

Die Länge des Vektors $\vec{b}$ hängt nur von der Seitenlänge der Grundfläche ab.

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (8)
b) 3.3.3 (8), 3.3.3 (9)

Nicht Standardstufe 10: c)

Teil-auf-gabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1				II		I		1	
b	1				I			1		
c	3	III	III			II				3

2022 – 1.1

		BE
	Gegeben ist die Ebene $E: 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0$.	
a	Prüfen Sie, ob der Punkt $(1 \mid 1{,}5 \mid 7)$ in E liegt.	1
b	Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.	2
c	Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl s, für die die Ebene $F: 2 \cdot x + s \cdot y + z = 4$ senkrecht zu E steht.	2
		5

Erwartungshorizont

a	$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1{,}5 = 0$, d. h. der Punkt liegt in E.
b	E enthält die z-Achse.
c	$\begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 2s = 0 \Leftrightarrow s = 3$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10:

Nicht Standardstufe 10: a), b),c)

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1					I		1		
b	2	II			II		I		2	
c	2		I			II		1	1	

2022 – 1.2

	BE
Gegeben sind die Punkte $A(0\,\vert\,0\,\vert\,0)$, $B(8\,\vert\,6\,\vert\,0)$ und $C(4\,\vert\,3\,\vert\,z)$, wobei z eine positive reelle Zahl ist.	
a Zeigen Sie, dass es sich beim Dreieck ABC um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ handelt.	2
b Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt 35. Bestimmen Sie den Wert von z.	3
	5

Erwartungshorizont

a
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\3\\z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+z^2}\ ,\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\-3\\z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+z^2}$$

b Mittelpunkt von $\overline{AB}$: $M(4\,\vert\,3\,\vert\,0)$
$$\tfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MC}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{64+36}\cdot z = 5z = 35 \Leftrightarrow z = 7$$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (9)
b) 3.3.2 (9), 3.3.3 (10)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2					I	I	2		
b	3		II			I		1	2	

2022 – 1.3

	BE
Gegeben sind die Punkte $P(2\,|\,0\,|\,1)$ und $Q(2\,|\,4\,|\,9)$ sowie die parallelen Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.	
a Zeigen Sie, dass g und h nicht identisch sind.	2
b Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade, die parallel zu g und h ist und die Strecke $\overline{PQ}$ im Punkt T schneidet, wobei $3 \cdot \left|\overline{PT}\right| = \left|\overline{QT}\right|$ gilt.	3
	5

Erwartungshorizont

a

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

b

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{4} \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (13)
b) 3.3.3 (11), 3.3.3 (12)

Teil-auf-gabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I				I		2		
b	3	II	II			I	II	1	2	

2022 – 2

	BE
Die Punkte $P(1\|1\|1)$ und $Q(1\|1\|3)$ sind benachbarte Eckpunkte eines Quadrats. Das Quadrat liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_1 - x_2 = 0$. Berechnen Sie die Koordinaten eines Punkts, der als weiterer Eckpunkt des Quadrats infrage kommt.	5

Erwartungshorizont

$\vec{v} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{v} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ liefert $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor der Gerade durch P und einen weiteren Eckpunkt R. Die Seitenlänge des Quadrats ist 2.

Damit:

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10:

Nicht Standardstufe 10: ganze Aufgabe

Teil-aufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
	5	III	III			II			2	3

(K1–K6: allgemeine mathematische Kompetenzen; I–III: Anforderungsbereich)

2023 – 1.1

	BE
Gegeben ist das folgende Gleichungssystem mit $x, y \in \mathbb{R}$. $\begin{array}{lrcrcr} \mathrm{I} & 3x & - & y & = & 4 \\ \mathrm{II} & -3x & - & 15y & = & 12 \end{array}$	
a Begründen Sie, dass das Gleichungssystem nur die Lösung $x = 1$ und $y = -1$ hat.	2
b Das gegebene Gleichungssystem wird um die folgende Gleichung mit $t \in \mathbb{R}$ erweitert: $\mathrm{III} \quad -2x + y = t$ Geben Sie die Anzahl der Lösungen des erweiterten Gleichungssystems in Abhängigkeit von t an. Begründen Sie ihre Angabe.	3
	5

Erwartungshorizont

		BE
a	Es gilt $3 \cdot 1 - (-1) = 4$ und $-3 \cdot 1 - 15 \cdot (-1) = 12$. Da die beiden Gleichungen nicht äquivalent sind, hat das Gleichungssystem keine weitere Lösung.	2
b	Es gilt $-2 \cdot 1 + (-1) = -3$. Damit hat das erweiterte Gleichungssystem für $t = -3$ genau eine Lösung und für alle anderen Werte von t keine Lösung.	3
		5

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 8: a) 3.2.1 (20)
b) 3.2.1 (25)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I			I	I		2		
b	3	II	II		I	I	I	1	2	

2023 – 1.2

	BE
Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade h durch die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$ und $B(5\,|\,1\,|\,b)$ mit einer reellen Zahl b.	
a Begründen Sie, dass A nicht auf g liegt.	1
b Die Geraden g und h haben einen gemeinsamen Punkt. Ermitteln Sie den Wert von b.	4
	5

Erwartungshorizont

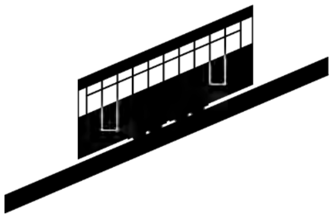
		BE
a	Alle Punkte von g haben die x_2-Koordinate 3, A hat die x_2-Koordinate 0.	1
b	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ liefert $r = 3$, $s = 5$ und damit $18 = 3b \Leftrightarrow b = 6$.	4
		5

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (12)
b) 3.3.3 (13)

Teil-auf-gabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1	I			I	I		1		
b	4	II	II		I	II		1	3	

2023 – 1.3

	BE
Betrachtet wird ein geradliniger Abschnitt der Strecke der abgebildeten Standseilbahn. In einem Koordinatensystem werden der Anfang und das Ende dieses Abschnitts durch die Punkte $A(-13\mid 9\mid 4)$ bzw. $E(-33\mid 69\mid 34)$ dargestellt, die Talstation der Seilbahn durch den Koordinatenursprung. Die x_1x_2-Ebene beschreibt die Horizontale. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 Metern in der Realität. 	
a Geben Sie die Bedeutung der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0;1]$ im Sachzusammenhang an.	1
b Ermitteln Sie die Höhe der Seilbahn über der Talstation, wenn die Seilbahn im beschriebenen Streckenabschnitt 140 Meter vom Anfang dieses Abschnitts entfernt ist.	4
	5

Erwartungshorizont

		BE
a	Die Gleichung stellt den beschriebenen Streckenabschnitt dar.	1
b	$\left\lvert\overline{AE}\right\rvert = \sqrt{20^2+60^2+30^2} = 70$ $4+\frac{14}{70}\cdot 30 = 10$, d. h. die gesuchte Höhe beträgt 100 Meter.	4
		5

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

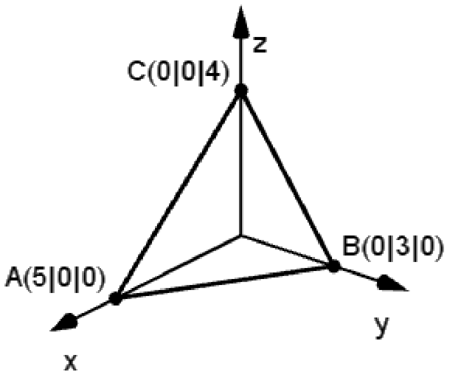
Standardstufe 10: a) 3.3.3 (12)
b) 3.3.2 (9), 3.3.2 (10)

Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	1					I	I	1		
b	4		II	II		I		2	2	

<u>2023 – 2</u>

BE

Die Abbildung zeigt das Dreieck ABC. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.



a Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, kann durch eine Gleichung der Form $12x + 20y + tz = 60$ dargestellt werden. Bestimmen Sie den Wert von t. 1

b Für jeden Wert von k mit $k \in]-3;5[$ wird die Pyramide OA_kB_kC mit $A_k(5-k\,|\,0\,|\,0)$ und $B_k(0\,|\,3+k\,|\,0)$ betrachtet. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Pyramide das größte Volumen hat. 4

5

<u>Erwartungshorizont</u>

		BE
a	Da C in der Ebene liegt, ergibt sich $4t = 60 \Leftrightarrow t = 15$.	1
b	Das Volumen der Pyramide OA_kB_kC kann mit dem Term $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(3+k)\cdot(5-k)\cdot 4$ berechnet werden. Stellt man die Werte des Terms in Abhängigkeit von k grafisch dar, so ergibt sich eine Parabel mit einem Hochpunkt, die bei -3 und 5 die k-Achse schneidet. Damit hat die Pyramide für $k = 1$ das größte Volumen.	4
		5

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: b) 3.3.2 (7)

Nicht Standardstufe 10: a)

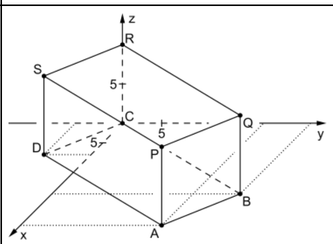
Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1				I	I		1		
b	4	III	III		II		II		1	3

IQB-Aufgaben
grundlegendes Niveau
Teil B

2015 – WTR

		BE
	In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Quader ABCDPQRS mit $A(26\,|\,18\,|\,0)$, $B(18\,|\,24\,|\,0)$, $C(0\,|\,0\,|\,0)$, $D(8\,|\,{-6}\,|\,0)$ und $P(26\,|\,18\,|\,10)$ gegeben. ABCD ist die Grundfläche des Quaders.	
a	Zeigen Sie, dass die Seitenfläche ABQP ein Quadrat ist.	3
b	Stellen Sie den Quader in einem Koordinatensystem grafisch dar.	3
c	Die Seitenfläche ABQP liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. *(zur Kontrolle: $E: 3x + 4y - 150 = 0$)*	3
d	Die Seitenfläche CDSR liegt in einer Ebene F. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass F durch die Gleichung $3x + 4y = 0$ beschrieben werden kann.	2
	Der Quader beschreibt modellhaft den Grundkörper eines Kunstwerks aus massivem Beton, der auf einer horizontalen Fläche steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 0,1 m in der Wirklichkeit.	
	Der Grundkörper ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt $G(17\,|\,8\,|\,10)$ der Deckfläche aus in Richtung des Punkts $H(20\,|\,10\,|\,4)$ der Seitenfläche DAPS verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von 1,4 m so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt und in einer Höhe von 0,9 m über der Deckfläche endet. Ihr Durchmesser wird im Modell vernachlässigt.	
e	Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet.	5
f	Auf der Deckfläche des Grundkörpers steht ein Stahlzylinder mit einem Radius von 0,3 m und einer Höhe von 0,5 m. Der Mittelpunkt der Grundfläche des Zylinders ist im Modell der Punkt M. Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stange den Stahlzylinder am Rand seiner Deckfläche berührt, wenn die Koordinaten von M bekannt wären.	4
		20

Erwartungshorizont

		BE
a	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AP}\rvert$ Als Seitenfläche eines Quaders ist ABQP ein Rechteck. Ein Rechteck mit zwei benachbarten Seiten gleicher Länge ist ein Quadrat.	3
b		3

c	$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AP}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x = 26 - 8\lambda$ II $y = 18 + 6\lambda$ III $z = 10\mu$ liefert $E: 3x + 4y - 150 = 0$.	3
d	Die Ebene F ist parallel zur Ebene E. Eine Gleichung von F hat deshalb auch die Form $3x + 4y + r = 0$ mit $r \in \mathbb{R}$. Da F den Koordinatenursprung enthält, ist $r = 0$.	2
e	Es gilt: $\lvert\overrightarrow{GH}\rvert = 7$, $\frac{1}{4} \cdot 1{,}4\,\text{m} = 0{,}35\,\text{m} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7\,\text{m}$ Mittelpunkt der Strecke von G nach H: $(18{,}5 \mid 9 \mid 7)$	5
f	Man erhält den Mittelpunkt N der Deckfläche des Zylinders, indem man M um fünf Längeneinheiten in positive z-Richtung verschiebt. Anschließend bestimmt man die Koordinaten des Punkts L auf der Geraden durch G und H, dessen z-Koordinate um 5 größer ist als die von G, sowie den Abstand d von L und N. Genau dann, wenn sich $d = 3$ ergibt, berührt die Stange den Stahlzylinder am Rand seiner Deckfläche.	4
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10:
a) 3.3.2 (10)
b) 3.3.3 (1), (9)
e) 3.3.2 (10), 3.3.3 (10)
f) 3.3.2 (9), 3.3.3(8), 3.3.3 (12)

nicht Standardstufe 10: c), d)

Teil-aufg.	**BE**	**Leitideen**					**allgemeine mathematische Kompetenzen[3]**						**Anforderungs-bereich**		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	3	X	X	X			I				I		X		
b	3			X						I			X		
c	3	X		X							II			X	
d	2			X			II	II						X	
e	5	X	X	X				II	II		I			X	
f	4		X	X				III	III			III			X

[3] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

2015 – CAS

BE

Im Berliner Bezirk Marzahn-Hellersdorf befindet sich ein Ausstellungsgebäude, das die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat (vgl. Abbildung). Die vollständig verglasten Außenwände sind zum Schutz gegen Sonneneinstrahlung teilweise mit Zinkblech verkleidet. Alle Glasscheiben stimmen in ihren Maßen überein.

Das Gebäude lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch die Pyramide ABCDS mit $B(9|9|0)$, $C(0|9|0)$, $D(0|0|0)$ und $S(4{,}5|4{,}5|12)$ beschreiben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

a Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an und stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem grafisch dar. 3

b Die Diagonalen der Grundfläche schneiden sich im Punkt F. Geben Sie die Koordinaten von F an. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{BF}$ und $\overrightarrow{FS}$ null ist. 3

c Die Seitenfläche BCS liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $E: 8x_2 + 3x_3 - 72 = 0$)

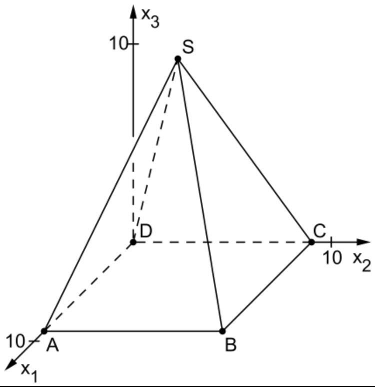
d Berechnen Sie die Größe der Neigungswinkel der Außenwände des Gebäudes gegen die Grundfläche. 3

e Der Innenraum des Ausstellungsgebäudes soll durch zwei Lichtleisten beleuchtet werden, die sich im Modell durch Strecken darstellen lassen. Diese Strecken beginnen in den Mittelpunkten der Kanten $\overline{CS}$ bzw. $\overline{DS}$ und enden in einem Punkt L der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABS zur Seite $\overline{AB}$. Ein Designer schlägt vor, den Punkt L so zu wählen, dass die Lichtleisten einen rechten Winkel einschließen. Untersuchen Sie, ob sich dieser Vorschlag geometrisch umsetzen lässt. 5

f Die Abbildung zeigt zwei Personen vor einer Außenwand des Gebäudes. Schätzen Sie mithilfe der Abbildung den prozentualen Anteil der verkleideten Fläche dieser Außenwand ab; erläutern Sie Ihr Vorgehen. 3

20

Erwartungshorizont

		BE
a	$A(9\mid 0\mid 0)$ 	3
b	$F(4{,}5\mid 4{,}5\mid 0)$ Der Vektor $\overrightarrow{FS}$ ist parallel zur x_3-Achse, der Vektor $\overrightarrow{BF}$ parallel zur x_1x_2-Ebene. Die beiden Vektoren stehen also senkrecht zueinander.	3
c	$E:\vec{x}=\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{BC}+s\cdot\overrightarrow{BS};\ r,s\in\mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x_1=9-9r-4{,}5s$ II $x_2=9-4{,}5s$ III $x_3=12s$ liefert $E: 8x_2+3x_3-72=0$.	3
d	Mit $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{m}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\alpha=\frac{\vec{n}\circ\vec{m}}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{m}\rvert}$, d. h. $\alpha\approx 69{,}4^\circ$	3
e	Mittelpunkt von $\overline{CS}$: $(2{,}25\mid 6{,}75\mid 6)$ Mittelpunkt von $\overline{DS}$: $(2{,}25\mid 2{,}25\mid 6)$ Gleichung der Mittelsenkrechten: $\overrightarrow{x_t}=\begin{pmatrix}4{,}5\\4{,}5\\12\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4{,}5\\0\\-12\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$ Die Gleichung $\left(\begin{pmatrix}2{,}25\\6{,}75\\6\end{pmatrix}-\overrightarrow{x_t}\right)\circ\left(\begin{pmatrix}2{,}25\\2{,}25\\6\end{pmatrix}-\overrightarrow{x_t}\right)=0$ hat keine Lösung. Der Vorschlag lässt sich also nicht umsetzen.	5
f	Die Glasscheiben der Außenwand sind in Reihen mit neun, sieben, fünf und drei Scheiben sowie einer Scheibe an der Spitze angeordnet. Die Fläche der Außenwand entspricht also etwa der Fläche von fünfundzwanzig Glasscheiben. Die Fläche, die nicht verkleidet ist, entspricht der Fläche von etwa zehn Scheiben. Der Anteil der verkleideten Fläche beträgt also etwa $\frac{15}{25}$, d. h. etwa 60 %.	3
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (1), (9)
b) 3.3.3 (10) erster Teil
f) 3.3.2 (8)

nicht Standardstufe 10: b) zweiter Teil 2, c), d),e)

Teil-aufg.	**BE**	**Leitideen**					**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungsbereich**		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	3			X					I	I	I		X		
b	3			X			I				I		X		
c	3	X		X							II			X	
d	3	X	X	X			I		I		II			X	
e	5	X		X				III	III		III				X
f	3		X	X				II		II		II		X	

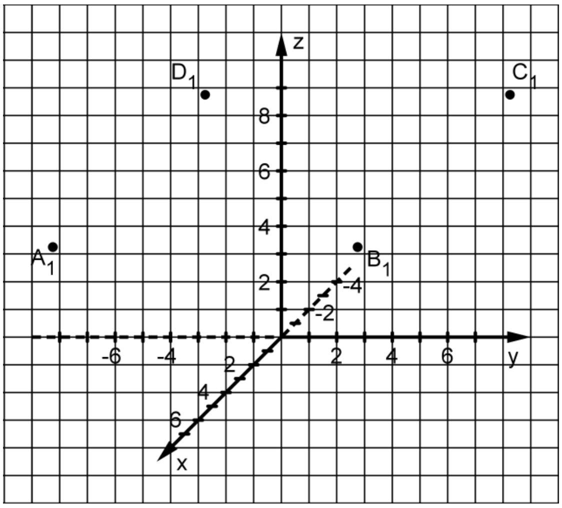
2017 – WTR 1

BE

Die abgebildete Pagode, Zeichen ostasiatischer Architektur, steht im Hamburger Tierpark Hagenbeck. Jede der drei Dachetagen besteht aus vier Dachflächen gleicher Form und Größe. Die Dachflächen der mittleren und oberen Etage sind jeweils parallel zu einer Dachfläche der unteren Etage.

In einem kartesischen Koordinatensystem können die Dachflächen der unteren Etage modellhaft als Vierecke dargestellt werden. Die Punkte $A_1(5{,}5\,|\,-5{,}5\,|\,6)$, $B_1(5{,}5\,|\,5{,}5\,|\,6)$, $C_1(-5{,}5\,|\,5{,}5\,|\,6)$, $D_1(-5{,}5\,|\,-5{,}5\,|\,6)$, $A_2(2\,|\,-2\,|\,8{,}1)$, $B_2(2\,|\,2\,|\,8{,}1)$, $C_2(-2\,|\,2\,|\,8{,}1)$ und $D_2(-2\,|\,-2\,|\,8{,}1)$ sind die Eckpunkte dieser vier Vierecke. Dabei beschreibt die xy-Ebene die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a Zeichnen Sie in das abgebildete Koordinatensystem für die untere Dachetage die fehlenden Eckpunkte sowie die Strecken ein, die die Kanten der Dachflächen darstellen. 3



b Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck $A_1B_1B_2A_2$ ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Begründen Sie, dass es sich nicht um ein Parallelogramm handelt. 3

c Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_1 und M_2 der Seiten A_1B_1 bzw. A_2B_2 an. Berechnen Sie den gesamten Inhalt der Dachflächen der unteren Etage in Quadratmetern. 5

d Die Strecke $\overline{A_1A_2}$ ist Teil einer Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g mit der z-Achse. 3

Das Viereck $A_1B_1B_2A_2$ liegt in der Ebene $E: 3x + 5z = 46{,}5$ und stellt die untere der drei Dachflächen auf der Südseite der Pagode dar.

e Berechnen Sie den Neigungswinkel dieser Dachfläche gegenüber der Horizontalen. 2

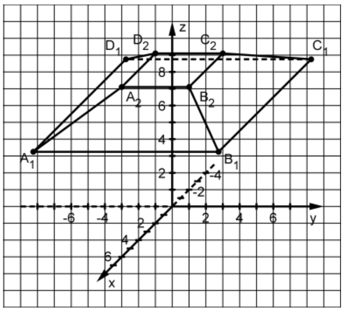
f Auch die beiden Dachflächen der mittleren und oberen Etage auf der Südseite der Pagode können im Modell jeweils durch ein Viereck dargestellt werden. Die Ebenen, in denen diese beiden Vierecke liegen, werden durch zwei der folgenden Gleichungen beschrieben. Ordnen Sie die beiden Dachflächen jeweils einer Gleichung zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. 4

I $3x+8z=46{,}5$ II $3x+5z=24{,}5$ III $3x+5z=58$

IV $3x+10z=46{,}5$ V $3x+5z=35$ VI $3x+5z=68{,}5$

20

Erwartungshorizont

		BE
a		3
b	$\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\overrightarrow{A_2B_2}$ sind kollinear und es gilt $\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\|=\left\|\overrightarrow{B_1B_2}\right\|$. Da $\left\|\overrightarrow{A_1B_1}\right\|\neq\left\|\overrightarrow{A_2B_2}\right\|$, ist $A_1B_1B_2A_2$ kein Parallelogramm.	3
c	$M_1(5{,}5\,\|\,0\,\|\,6)$, $M_2(2\,\|\,0\,\|\,8{,}1)$ $\frac{1}{2}\cdot\left(\left\|\overrightarrow{A_1B_1}\right\|+\left\|\overrightarrow{A_2B_2}\right\|\right)\cdot\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|\approx 30{,}6$ Der gesamte Inhalt der Dachflächen der unteren Etage beträgt etwa $122\,m^2$.	5
d	$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5{,}5\\-5{,}5\\6\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3{,}5\\3{,}5\\2{,}1\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R}$ $5{,}5-3{,}5\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{11}{7};\ 6+2{,}1\cdot\frac{11}{7}=9{,}3$ Damit: $(0\,\|\,0\,\|\,9{,}3)$	3
e	Mit $\vec{m}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\varphi=\frac{\vec{m}\circ\vec{n}}{\left\|\vec{m}\right\|\cdot\left\|\vec{n}\right\|}$, d. h. $\varphi\approx 31°$	2
f	III: Dachfläche der mittleren Etage VI: Dachfläche der oberen Etage Die drei Dachflächen auf der Südseite der Pagode sind parallel zueinander. Die Normalenvektoren der Ebenen, in denen im Modell die drei zugehörigen Vierecke liegen, sind deshalb kollinear. Damit kommen nur die Gleichungen II, III, V und VI infrage.	4

	Betrachtet man für die drei Vierecke zur unteren, mittleren und oberen Dachfläche jeweils einen Punkt mit der gleichen x-Koordinate und den z-Koordinaten z_1, z_2 bzw. z_3, so gilt $z_1 < z_2 < z_3$ und damit $3x + 5z_1 < 3x + 5z_2 < 3x + 5z_3$.	
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

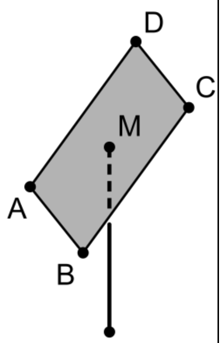
Standardstufe 10: a) 3.3.3 (9)
b) 3.3.2 (10), 3.3.3 (11)
c) 3.3.2 (10), 3.3.3 (10)
d) 3.3.3 (12), (13)

nicht Standardstufe 10: e), f)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X		X						I		I	X		
b	3	X	X	X			II	II			I			X	
c	5	X	X	X					I		II			X	
d	3	X		X				I			I		X		
e	2	X	X	X					I		II			X	
f	4			X			III	III	II						X

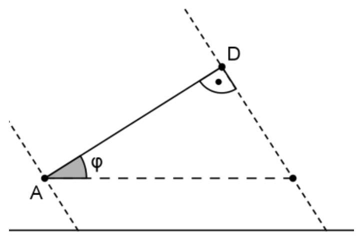
2017 – WTR 2

	BE
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0\|0\|1)$, $B(2\|6\|1)$ und $C(-4\|8\|5)$ gegeben.	
a Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.	2
b Weisen Sie nach, dass der Punkt $M(-2\|4\|3)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist; das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat.	4
c Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist.	1
d Das Rechteck ABCD liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. *(zur Kontrolle: $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)*	4
Solarmodule werden auf einem Trägergestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird modellhaft durch das Rechteck ABCD dargestellt, der Befestigungspunkt des Metallrohrs am Trägergestell durch den Punkt M (vgl. Abbildung). Im Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund, auf dem das Metallrohr steht; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit.	
e Im Sinne eines möglichst großen Energieertrags sollte der Neigungswinkel der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.	3
f Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke darstellen. Geben Sie eine Gleichung dieser Strecke an.	2
g Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, senkrecht auf die Fläche der Solarmodule. Diese Fläche erzeugt auf dem horizontalen Untergrund einen rechteckigen Schatten. Begründen Sie die folgende Aussage unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze: *Der Flächeninhalt des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt, ist größer als der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD.*	4
	20



Erwartungshorizont

		BE
a	Die x_3-Koordinaten der Punkte A und B stimmen überein.	2
b	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$	4

	$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$	
c	$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$, $D(-6 \mid 2 \mid 5)$	1
d	$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x_1 = 2\lambda - 4\mu$ II $x_2 = 6\lambda + 8\mu$ III $x_3 = 1 + 4\mu$ liefert $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$.	4
e	Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\varphi = \frac{\vec{m} \circ \vec{n}}{\lvert\vec{m}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert}$, d. h. $\varphi \approx 32{,}3°$ Die Bedingung ist erfüllt.	3
f	$\vec{x} = \overrightarrow{OM} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\sigma \in [-3; 0]$	2
g	Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist der Wert des Produkts der Seitenlängen. Die Gerade AB verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene, die Gerade AD nicht. Damit ist die eine Seite des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt, genauso lang wie die Strecke $\overline{AB}$, die andere Seite länger als die Strecke $\overline{AD}$. 	4
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe10: a) 3.3.3 (13)
b) 3.3.3 (10) erster Teil
c) 3.3.3 (8)
f) 3.3.3 (12)
g) 3.3.3 (5)

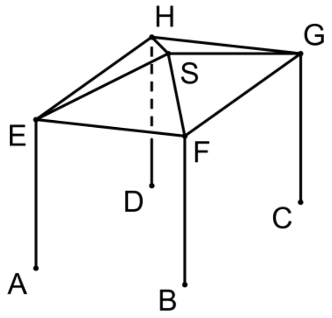
nicht Standardstufe 10: b) zweiter Teil, d) , e)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X			I				I		X		
b	4	X		X			I				I		X		
c	1	X		X				I			I		X		
d	4	X		X							II			X	
e	3	X	X	X					I		II			X	
f	2	X	X	X				II	II			I		X	
g	4		X	X			III			II		III			X

2017 – CAS 1

BE

Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.



In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten für einen Wert von z mit $z \in \mathbb{R}$ modellhaft durch die Punkte $A(2|-3|z)$, B, C und $D(-3|-2|z)$ sowie $E(2|-3|4)$, $F(3|2|4)$, $G(-2|3|4)$ und H dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0|0|5)$. Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

a Geben Sie an, wie tief die Pfosten in den Untergrund hineinreichen. 1

b Geben Sie die Koordinaten des Punkts H an. Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist. 5

c Begründen Sie, dass die Pyramide EFGHS symmetrisch zur x_3-Achse ist. 3

d Berechnen Sie den Inhalt der gesamten Dachfläche in Quadratmetern. 3

e An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt durch $T(0|0|5,5)$ dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschreiben. Der untere Endpunkt des Schattens liegt auf der durch die Strecke EF dargestellten Dachkante. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts, der den unteren Endpunkt des Schattens darstellt. 4

f Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an dem Pfosten befestigt, der im Modell durch die Strecke $\overline{AE}$ dargestellt wird, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte. Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Abschnitte. 4

25

Erwartungshorizont

		BE
a	Die Pfosten ragen 0,5 m in den Untergrund hinein.	1
b	$H(-3|-2|4)$	5

	Wegen $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ ist es ein Parallelogramm, wegen $\overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{FG} = 0$ und $\left\|\overrightarrow{EF}\right\| = \left\|\overrightarrow{FG}\right\|$ ein Quadrat.	
c	Die Pyramide ist gerade und hat eine quadratische Grundfläche, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Der Mittelpunkt der Grundfläche liegt ebenso auf der x_3-Achse wie die Spitze S.	3
d	Mittelpunkt der Seite EF: $M(2{,}5 \mid -0{,}5 \mid 4)$ $\frac{1}{2} \cdot \left\|\overrightarrow{EF}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{MS}\right\| \approx 7{,}0$ Die Dachfläche hat einen Flächeninhalt von etwa $28\,m^2$.	3
e	Für $r, s \in \mathbb{R}$ liefert $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$: $r = 0{,}5$ Damit: $(2{,}5 \mid -0{,}5 \mid 4)$	4
f	Wählt man für die beiden Punkte, die im Modell die beiden Enden des zusätzlichen Balkens darstellen, $I \in \overline{AE}$ und $J \in \overline{EF}$, so gilt: I hat die Koordinaten $(2 \mid -3 \mid 3{,}5)$. J liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + t \cdot \overrightarrow{EF}$ mit $t \in \mathbb{R}$, hat also die Koordinaten $(2 + t \mid -3 + 5t \mid 4)$. Für $0 \le t \le 1$ gilt: $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = 2{,}1 \Leftrightarrow t = 0{,}4$ Damit ergibt sich als Verhältnis $2:3$.	4
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10:
a) 3.3.2 (10)
b) 3.3.2 (10) erster Teil
c) 3.3.3 (10)
d) 3.3.2 (10), 3.3.3 (10)
e) 3.3.3 (12), (13)
f) 3.3.2 (9), 3.3.3 (12)

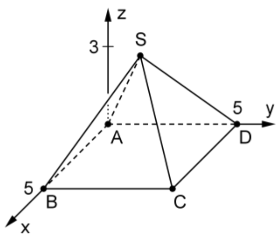
Nicht Standardstufe 10: b) zweiter Teil

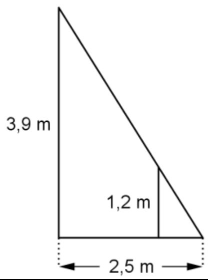
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1	X	X	X			I		I		I		X		
b	5	X		X			I			I	I		X		
c	3	X		X			II	II				II		X	
d	3	X	X	X					I	I	II			X	
e	4	X		X				II	II		II			X	
f	4	X	X	X				III	III		III				X

2017 – CAS 2

	BE
In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS mit $A(0\|0\|0)$, $B(5\|0\|0)$, $C(5\|5\|0)$ und $D(0\|5\|0)$ sowie der Spitze $S(2{,}5\|2{,}5\|3{,}9)$ gegeben.	
a Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.	3
b Begründen Sie ohne Verwendung von Vektoren, dass die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat ist.	2
c Bestimmen Sie den Inhalt einer Seitenfläche der Pyramide.	2
d Die Punkte A, B und S liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. *(zur Kontrolle: $E: -39y + 25z = 0$)*	3
Die Pyramide stellt modellhaft ein geschlossenes Zelt dar, das auf horizontalem Untergrund steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.	
e Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels einer Zeltwand gegenüber der Horizontalen.	2
f Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -12{,}5 \\ -3{,}9 \end{pmatrix}$ beschreiben. Zu diesem Zeitpunkt trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch in einer Zeltwand genau auf den Eckpunkt des Zeltbodens, der durch den Punkt B beschrieben wird. Der Punkt $L(x_L \| y_L \| 1{,}3)$ stellt das Loch in der Zeltwand dar. Bestimmen Sie die Werte von x_L und y_L.	3
g Auf einem Teil des Zeltbodens hat ein 1,20 m großes Kind die Möglichkeit, aufrecht zu stehen. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Anteil des Flächeninhalts dieses Teils am Flächeninhalt des gesamten Zeltbodens. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen anhand einer geeignet beschrifteten Skizze.	5
	20

Erwartungshorizont

		BE
a		3
b	Alle Seiten des Vierecks ABCD haben die Länge 5. Da A der Koordinatenursprung ist sowie B und D auf den Koordinatenachsen liegen, hat das Viereck bei A einen rechten Winkel.	2

c	$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{3{,}9^2+2{,}5^2}\approx 11{,}6$	2
d	$E:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AS};\ r,s\in\mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x=5r+2{,}5s$ II $y=2{,}5s$ III $z=3{,}9s$ liefert: $E:-39y+25z=0$	3
e	Mit $\vec{m}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-39\\25\end{pmatrix}$ ergibt sich für den Neigungswinkel φ der Zeltwand, die durch das Dreieck ABS dargestellt wird: $\cos\varphi=\frac{\vec{m}\circ\vec{n}}{\lvert\vec{m}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$, d. h. $\varphi\approx 57{,}3°$	2
f	Für $t\in\mathbb{R}$ liefert $\begin{pmatrix}x_L\\y_L\\1{,}3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}7{,}5\\-12{,}5\\-3{,}9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$: $x_L=\frac{5}{2},\ y_L=\frac{25}{6}$	3
g	 $\frac{\left(2\cdot\left(2{,}5\,m-\frac{1{,}2}{3{,}9}\cdot 2{,}5\,m\right)\right)^2}{(5\,m)^2}\approx 48\,\%$	5
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10:
a) 3.3.3 (9)
b) 3.3.2 (9)
c) 3.3.2 (9), 3.3.3 (4)
f) 3.3.3 (12)
g) 3.3.3 (5)

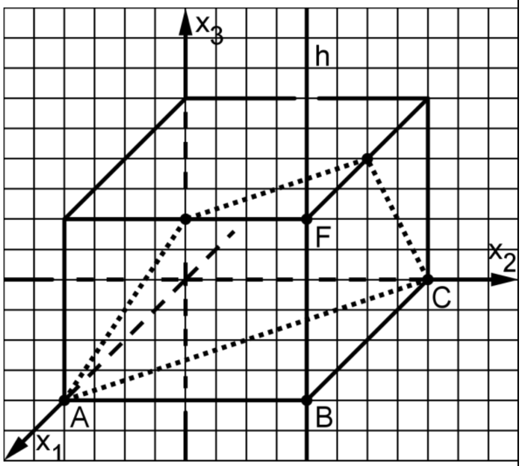
nicht Standardstufe 10: d), e)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X		X						I			X		
b	2	X	X	X			I				I	I	X		
c	2	X	X	X				I			I		X		
d	3	X		X							II			X	
e	2	X	X	X					I		II			X	
f	3	X		X				II	II		II			X	
g	5		X	X			II	III		II					X

2018 – WTR 1

BE

Die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,4\,|\,0)$, $C(0\,|\,4\,|\,0)$ und $F(4\,|\,4\,|\,3)$ sind Eckpunkte des abgebildeten Quaders. Die Gerade h verläuft durch B und F.



a Begründen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks an. 3

b Geben Sie eine Gleichung der Gerade an, die durch A und C verläuft. Begründen Sie, dass diese Gerade windschief zur Gerade h ist. 3

Die Abbildung zeigt gepunktet die Seiten der Schnittfigur des Quaders und einer Ebene, in der die Punkte A und C sowie ein Punkt P der Gerade h liegen. Diese Ebene zerlegt den Quader in zwei Teilkörper.

c Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung ermitteln kann, dass P die x_3-Koordinate 6 hat. 3

d Berechnen Sie das Volumen desjenigen der beiden Teilkörper, zu dem der Punkt B gehört, und erläutern Sie Ihr Vorgehen. 5

Die Punkte der Gerade h lassen sich durch $P_t(4\,|\,4\,|\,t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen. Für jeden Wert von t liegen A, C und P_t in der Ebene $E_t: t \cdot x_1 + t \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 - 4t = 0$. Dabei ist E_6 diejenige Ebene, für die in der Abbildung die Seiten der Schnittfigur dargestellt sind.

e Zeigen Sie, dass der Punkt $(0\,|\,0\,|\,2)$ der Schnittpunkt der Ebene E_{-2} mit der x_3-Achse ist. 2

f Es gibt Werte von t, für die die Schnittfigur des Quaders und der Ebene E_t nicht die Form eines Vierecks, sondern die eines Dreiecks hat. Geben Sie alle diese Werte von t an und beschreiben Sie in Abhängigkeit von t die Lage der Eckpunkte des Dreiecks. 4

20

Erwartungshorizont

		BE
a	Den Koordinaten der gegebenen Punkte ist zu entnehmen, dass das Viereck OABC ein Quadrat ist. Damit ist das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig.	3

	Flächeninhalt: 8	
b	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u \in \mathbb{R}$ Die Gerade h schneidet die x_1x_2-Ebene im Punkt B. Die Gerade durch A und C liegt in der x_1x_2-Ebene und verläuft nicht durch B.	3
c	Verlängert man eine passende Seite der Schnittfigur so, dass die Verlängerung die Gerade h schneidet, so liefert der Schnittpunkt die x_3-Koordinate von P.	3
d	Volumen der Pyramide $ABCP$: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 16$ Volumen der Pyramide, die den betrachteten Teilkörper zur Pyramide $ABCP$ ergänzt: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2$ Volumen des betrachteten Teilkörpers: $16 - 2 = 14$	5
e	Der gegebene Punkt liegt wegen $x_1 = x_2 = 0$ auf der x_3-Achse und wegen $-2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + 8 = 0$ in der Ebene E_{-2}.	2
f	$t \in [-3;3] \setminus \{0\}$ Zwei der Eckpunkte sind stets die Punkte A und C. Für $0 < t \leq 3$ liegt der dritte Eckpunkt auf der Seitenkante $\overline{BF}$ des Quaders, für $-3 \leq t < 0$ auf der gegenüberliegenden Seitenkante.	4
		25

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: b) 3.3.3 (12), (13)
c) 3.3.3 (9)
d) 3.3.2 (8), (9)

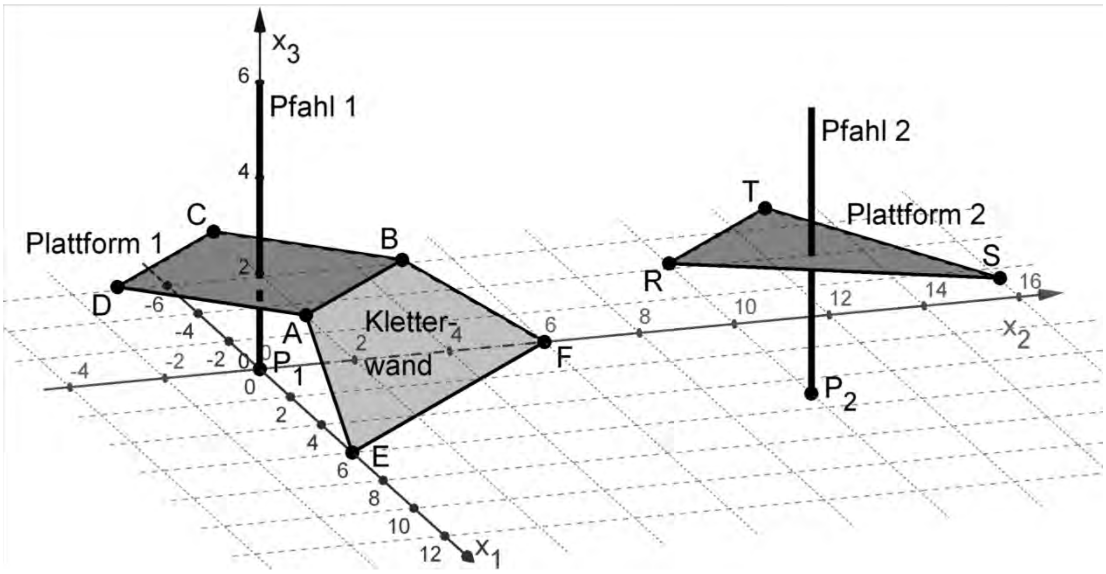
nicht Standardstufe 10: a), e), f)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3		X	X			I			I	I		X		
b	3	X		X			I				I	I	X		
c	3			X			II			II		II		X	
d	5		X	X			II	II			I	II		X	
e	2			X							II			X	
f	4			X				III		III		II			X

2018 – WTR 2

BE

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$, $S(8|13|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

a In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20 % länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils. 3

Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene $L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$.

b Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. 3

c Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt. 3

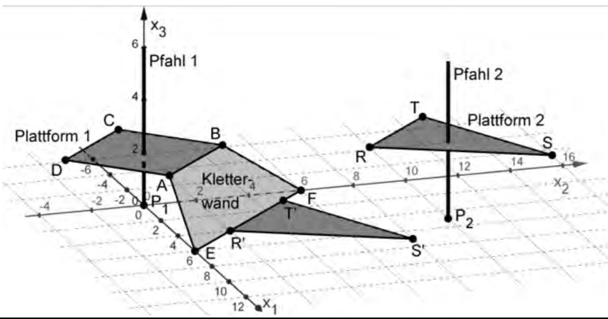
d Auf die Anlage treffendes Sonnenlicht kann im Modell durch parallele Geraden beschrieben werden. Die Eckpunkte der Plattform 2 werden durch R, S und T dargestellt, die zugehörigen Eckpunkte des Schattens dieser Plattform durch $R'(4|2|0)$, S' bzw. $T'(1|5|0)$. Zeigen Sie rechnerisch, dass T' auf der Strecke $\overline{EF}$ liegt. Berechnen Sie die Koordinaten von S' und stellen Sie den Schatten der Plattform 2 in der obigen Abbildung grafisch dar. 6

e Über ein Drahtseil kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Der eine Endpunkt dieses Seils ist am Pfahl 1 auf der Höhe der Plattform 1 befestigt, der an- 5 dere am Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. Das Seil ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es geradlinig verläuft. Es berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch $\overline{RT}$ dargestellt wird.

Betrachtet wird derjenige Endpunkt des Seils, der oberhalb der Plattform 2 befestigt ist. Beschreiben Sie, wie man den Abstand dieses Endpunkts von der Plattform 2 berechnen könnte, wenn bekannt wäre, in welchem Verhältnis die durch $\overline{RT}$ dargestellte Seite der Plattform durch den Berührpunkt des Seils geteilt wird.

20

Erwartungshorizont

		BE
a	Die Mittelpunkte von $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ sind $M_1(1{,}5\,\vert\,1{,}5\,\vert\,2)$ bzw. $M_2(3\,\vert\,3\,\vert\,0)$. $1{,}2\cdot\left\vert\overrightarrow{M_1M_2}\right\vert = 1{,}2\cdot\sqrt{1{,}5^2+1{,}5^2+4}\approx 3{,}5$, d. h. das Seil ist etwa 3,5 m lang.	3
b	$\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}=2\cdot\overrightarrow{AB}$, $\left\vert\overrightarrow{AE}\right\vert=\left\vert\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}\right\vert=\left\vert\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right\vert=\left\vert\overrightarrow{BF}\right\vert$	3
c	Mit $\vec{m}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\alpha=\frac{\vec{m}\circ\vec{n}}{\vert\vec{m}\vert\cdot\vert\vec{n}\vert}=\frac{3}{\sqrt{17}}$, d. h. $\alpha\approx 43°$	3
d	$\overrightarrow{ET'}=\begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=5\cdot\overrightarrow{T'F}$ $\overrightarrow{P_1S}+\overrightarrow{RR'}=\begin{pmatrix}8\\13\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\\0\end{pmatrix}$ $S'(7\,\vert\,8\,\vert\,0)$ 	6
e	Man bestimmt die Koordinaten des Punkts U, der die Strecke von R nach T im bekannten Verhältnis teilt. Anschließend berechnet man die Koordinaten des Schnittpunkts V der Gerade durch den Punkt, der den Befestigungspunkt des Seils am Pfahl 1 darstellt, und den Punkt U mit der Gerade, die durch P_2 verläuft und senkrecht zur x_1x_2-Ebene steht. Die Differenz der x_3-Koordinaten von V und R ist der gesuchte Abstand in Metern.	5
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (9), 3.3.3 (10)
b) 3.3.2 (9), 3.3.3 (11)
d) 3.3.3 (8), (9), (12)

nicht Standardstufe 10: c), e)

Teil-aufg.	**BE**	**Leitideen**					**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungs-bereich**		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	3	X	X	X					I	I	I		X		
b	3	X	X	X			I		I		I		X		
c	3	X	X	X				I	I		II			X	
d	6	X		X			II			I	II			X	
e	5		X	X				III	III			III			X

2018 – CAS 1

BE

Die Position einer Bohrplattform im Meer kann in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch den Punkt $P(8\,|\,43{,}2\,|\,0)$ dargestellt werden. Die xy-Ebene beschreibt die Wasseroberfläche. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität.
Die Besatzungen eines Boots und eines Hubschraubers werden gleichzeitig beauftragt, die Besatzung der Plattform in einer Notsituation zu unterstützen. Zum Zeitpunkt des Auftrags wird die Position des Boots durch den Punkt $B(13\,|\,31{,}2\,|\,0)$ dargestellt. Unmittelbar anschließend fährt es geradlinig mit der Geschwindigkeit $52\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in Richtung der Plattform.

Die Position des Hubschraubers kann vom Zeitpunkt des Auftrags bis zum Beginn seiner Landephase durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}3 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 286 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden, die seit dem Auftrag vergangen ist. Die Landephase beginnt im Modell im Punkt $H_L(7{,}76\,|\,41{,}77\,|\,0{,}25)$.

a Veranschaulichen Sie die Positionen der Plattform, des Boots und des Hubschraubers zum Zeitpunkt des Auftrags – unter Vernachlässigung der Flughöhe des Hubschraubers – in der xy-Ebene. 2

b Begründen Sie, dass der Hubschrauber bis zur Landephase parallel zur Wasseroberfläche fliegt, und geben Sie seine Flughöhe über der Wasseroberfläche an. 2

c Begründen Sie, dass die Position des Boots vom Zeitpunkt des Auftrags bis zum Erreichen der Plattform durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 31{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird, wobei t die seit dem Auftrag vergangene Zeit in Stunden ist. 4

d Ermitteln Sie, wie viel Zeit vom Zeitpunkt des Auftrags an vergeht, bis das Boot die Plattform erreicht. 2

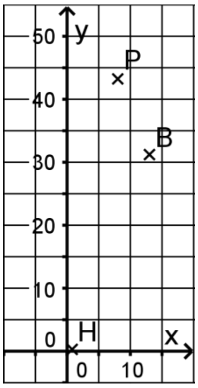
e Betrachtet wird die Funktion e mit $e(t) = \left| \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}3 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 31{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 48 \\ 286 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right|$ und $0 < t < 0{,}145$. Bestimmen sie denjenigen Wert von t, für den e seinen kleinsten Wert annimmt, und beschreiben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang. 4

f Der Hubschrauber bewegt sich während seiner Landephase mit verringerter Geschwindigkeit geradlinig auf die horizontale Landefläche der Plattform zu, die im Modell durch den Punkt $L(8\,|\,43{,}2\,|\,0{,}06)$ dargestellt wird. Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Flugbahn während der Landephase gegenüber der Horizontalen. 3

g Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform, in der sich der Hubschrauber vom Auftrag bis zur Landung im Modell bewegt. 3

20

Erwartungshorizont

		BE
a		2
b	Alle Punkte, die die Positionen des Hubschraubers darstellen, haben die gleiche z-Koordinate. Flughöhe: 250 m	2
c	Für $t=0$ ergibt sich $\vec{x}=\begin{pmatrix}13\\31{,}2\\0\end{pmatrix}$, d. h. der Ortsvektor von B. Der Vektor $\begin{pmatrix}-20\\48\\0\end{pmatrix}$ ist kollinear zu $\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}-5\\12\\0\end{pmatrix}$. Es gilt $\left\lvert\begin{pmatrix}-20\\48\\0\end{pmatrix}\right\rvert=52$, d. h. passend zur angegebenen Geschwindigkeit legt der Hubschrauber pro Stunde 52 km zurück.	4
d	$\begin{pmatrix}13\\31{,}2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-20\\48\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\43{,}2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$, d. h. es vergehen 15 Minuten.	2
e	$e'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{2407}{18020}$ Der Wert entspricht der Zeit in Stunden, die vom Zeitpunkt des Auftrags an vergeht, bis der Hubschrauber die geringste Entfernung zum Boot hat.	4
f	Mit $\overrightarrow{H_LL}=\begin{pmatrix}0{,}24\\1{,}43\\-0{,}19\end{pmatrix}$ und $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ liefert $\sin\alpha=\frac{\lvert\overrightarrow{H_LL}\circ\vec{n}\rvert}{\lvert\overrightarrow{H_LL}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$: $\alpha\approx 7{,}5°$	3
g	$\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}3\\0{,}25\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}48\\286\\0\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}0{,}24\\1{,}43\\-0{,}19\end{pmatrix}$; $t,u\in\mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x=0{,}8+48t+0{,}24u$ II $y=0{,}3+286t+1{,}43u$ III $z=0{,}25-0{,}19u$ liefert $715x-120y-536=0$.	3
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (9)
b) 3.3.3 (8), (14)
c) 3.3.3 (12), (14)
d) 3.3.3 (12), (14)

nicht Standardstufe 10: e), f), g)

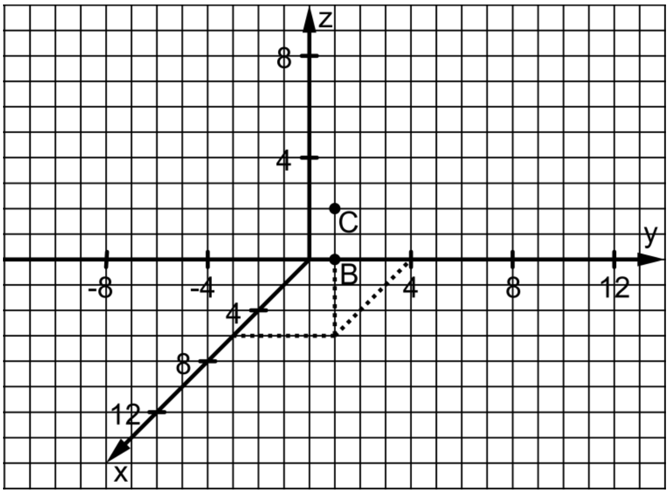
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X	X				I	I		I	X		
b	2	X		X	X		I		I			I	X		
c	4	X	X	X	X		II		II	I				X	
d	2	X	X	X	X				I		I	I	X		
e	4	X	X	X	X			III	III		II				X
f	3	X	X	X				I	I		II			X	
g	3	X		X					I		II			X	

2018 – CAS 2

BE

Vor einer Hauswand ist ein rechteckiges Reklameschild angebracht, das durch einen Scheinwerfer beleuchtet wird. Der Scheinwerfer lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch den Punkt $L(12\,|\,-4\,|\,3)$ beschreiben. Die Eckpunkte des Schilds werden durch die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,3)$, $B(6\,|\,4\,|\,3)$, $C(6\,|\,4\,|\,5)$ und $D(4\,|\,0\,|\,5)$ dargestellt. Die xy-Ebene beschreibt den horizontalen Untergrund, auf dem das Haus steht, die yz-Ebene die Ebene, in der die Hauswand liegt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a Zeichnen Sie das Rechteck ABCD sowie den Punkt L in die Abbildung ein. **2**



Auf der Hauswand ist der Schatten des Schilds sichtbar. Der Punkt $A'(0\,|\,2\,|\,3)$ stellt den zu A gehörenden Eckpunkt des Schattens dar, die Punkte $C'(0\,|\,12\,|\,7)$ und $D'(0\,|\,2\,|\,6)$ die zu C bzw. D gehörenden Eckpunkte.

b Weisen Sie nach, dass der vierte Eckpunkt des Schattens durch $B'(0\,|\,12\,|\,3)$ dargestellt wird. **2**

c Ergänzen Sie das zum Schatten gehörende Viereck in Ihrer Zeichnung zu Teilaufgabe a und begründen Sie, dass die untere Kante des Schattens horizontal verläuft. **2**

d Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schattens. **3**

e Berechnen Sie die Größe des größten Innenwinkels des Schattens. **3**

Der Scheinwerfer kann entlang einer vertikal verlaufenden Stange in der Höhe verschoben werden; dabei liegt der Schatten des Schilds stets vollständig auf der Hauswand. Für jede der beiden Kanten des Schattens, die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, gelten folgende Aussagen:

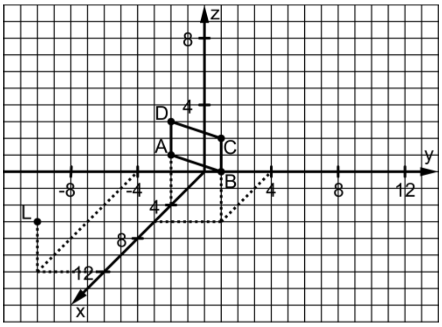
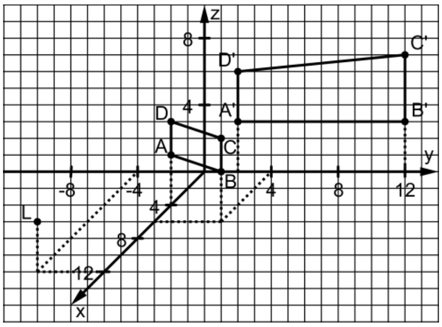
I *Die Kante verläuft für alle Positionen des Scheinwerfers entlang derselben vertikalen Gerade.*

II *Die Länge der Kante bleibt bei Verschiebung des Scheinwerfers unverändert.*

f Weisen Sie die Gültigkeit der Aussage II für eine der beiden betrachteten Kanten des Schattens rechnerisch nach. **5**

g	Begründen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Schattens bei Verschiebung des Scheinwerfers nicht verändert.	3
		20

Erwartungshorizont

		BE
a		2
b	Da B' die x-Koordinate 0 hat, liegt der Punkt in der yz-Ebene. Zudem sind $\overrightarrow{LB'} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{LB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ kollinear.	2
c	Begründung: Die Punkte A' und B' haben die gleiche z-Koordinate. 	2
d	$\frac{1}{2} \cdot \left(\overline{A'D'} + \overline{B'C'} \right) \cdot \overline{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot (3+4) \cdot 10 = 35$ Der Flächeninhalt des Schattens beträgt $35\,\text{m}^2$.	3
e	$\overrightarrow{D'A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{D'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{D'A'} \cdot \overrightarrow{D'C'}}{\left\lvert \overrightarrow{D'A'} \right\rvert \cdot \left\lvert \overrightarrow{D'C'} \right\rvert} = \frac{-3}{3\sqrt{101}}$, d. h. $\varphi \approx 96^\circ$	3
f	Punkt, der den Scheinwerfer beschreibt: $L_h(12 \mid -4 \mid h)$ Punkte, die die Endpunkte einer der beiden betrachteten Kanten darstellen: $A'_h(0 \mid 2 \mid z_{A'})$, $D'_h(0 \mid 2 \mid z_{D'})$ $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ h \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ z_{A'} \end{pmatrix}$ liefert: $z_{A'} = 4{,}5 - 0{,}5h$	5

	$\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ h \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ z_{D'} \end{pmatrix}$ liefert: $z_{D'} = 7{,}5 - 0{,}5h$ Damit: $\overline{A_h'D_h'} = 3$	
g	Die beiden Kanten des Schattens, die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, sind unabhängig von der Position des Scheinwerfers parallel zueinander. Bei Verschiebung des Scheinwerfers verändern sich weder ihre Längen noch ihr Abstand.	3
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

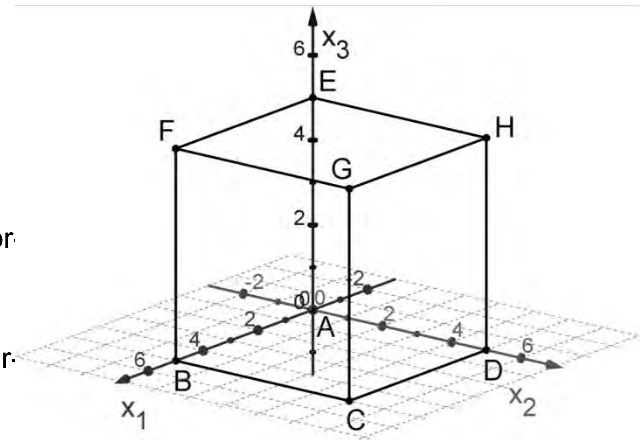
Standardstufe 10:
a) 3.3.3 (9)
b) 3.3.3 (11), (12), (13)
c) 3.3.3 (9)
d) 3.3.3 (5), (9)
g) 3.3.3 (5)

nicht Standardstufe 10: e), f)

Teilaufg.	**BE**	**Leitideen**					**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungsbereich**		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	2			X						I			X		
b	2	X		X				II	II		II			X	
c	2			X			I		I	I			X		
d	3		X	X					I	I	I		X		
e	3	X	X	X						I	II			X	
f	5	X	X	X			III	III			II				X
g	3			X			II	II				II		X	

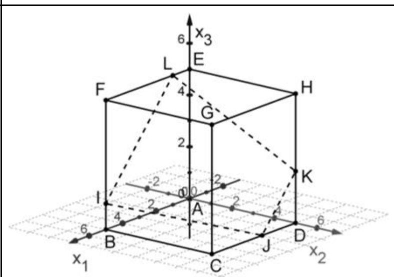
2019 – WTR 1

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $G(5|5|5)$ und $H(0|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Punkte $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$ liegen jeweils auf einer Kante des Würfels.



		BE
a	Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.	2
b	Zeigen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Weisen Sie nach, dass die Seite $\overline{IL}$ des Trapezes doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{JK}$.	4
c	Berechnen Sie die Größe eines Innenwinkels des Trapezes IJKL.	2
d	Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes IJKL.	4
e	Gegeben ist die Ebene $S: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$. Der Punkt K liegt in einer Ebene T, die parallel zu S ist. Untersuchen Sie, ob auch der Punkt L in T liegt.	3
f	Für einen Wert von r schneidet die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4-r \\ 0 \\ r^2+1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}$ die Kante $\overline{GH}$ des Würfels. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem der Schnittpunkt die Kante teilt.	5
		20

Erwartungshorizont

		BE
a		2
b	$\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{JK}$, d. h. $\overline{IL}$ ist doppelt so lang wie $\overline{JK}$ und die beiden Seiten sind parallel zueinander. Zudem gilt $\left\lvert\overrightarrow{IJ}\right\rvert = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \left\lvert\overrightarrow{KL}\right\rvert$.	4
c	Der Innenwinkel mit dem Scheitel L wird mit φ bezeichnet.	2

	$\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{8}{\sqrt{1120}}$ liefert $\varphi \approx 76°$.	
d	Aufgrund der Symmetrie des Trapezes ist die Länge seiner Höhe der Abstand der Mittelpunkte der Seiten $\overline{IL}$ bzw. $\overline{JK}$, d. h. der Abstand von $(3\,\vert\,0\,\vert\,3)$ und $(1\,\vert\,5\,\vert\,1)$. Damit gilt für den Flächeninhalt: $\frac{1}{2}\cdot\left(\lvert\overline{IL}\rvert + \lvert\overline{JK}\rvert\right)\cdot\sqrt{2^2+5^2+2^2} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{33} = 3\sqrt{66}$	4
e	Die Gleichung von T hat die Form $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + v = 0$. Es gilt $K \in T \Leftrightarrow 5\cdot 0 + 4\cdot 5 + 5\cdot 2 + v = 0 \Leftrightarrow v = -30$. Wegen $5\cdot 1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 5 - 30 = 0$ liegt auch L in T.	3
f	Gerade durch G und H: $\vec{x} = \overrightarrow{AG} + w\cdot\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix},\ w \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix}4-r\\0\\r^2+1\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} + w\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem: I $4 - r + 4u = 5 - 5w$ II $-5u = 5$ III $r^2 + 1 = 5$ II und III liefern $u = -1$ bzw. $r = -2 \vee r = 2$. Aus I ergibt sich damit $w = \frac{3}{5}$ bzw. $w = \frac{7}{5}$. Nur für $w = \frac{3}{5}$ liegt der Schnittpunkt auf $\overline{GH}$. Damit wird $\overline{GH}$ im Verhältnis $3:2$ geteilt.	5
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10:
a) 3.3.3 (9)
b) 3.3.2 (9), (10), 3.3.3 (11)
d) 3.3.2 (9), (10), 3.3.3 (10)
f) 3.3.2 (9), (10), 3.3.3 (12), (13)

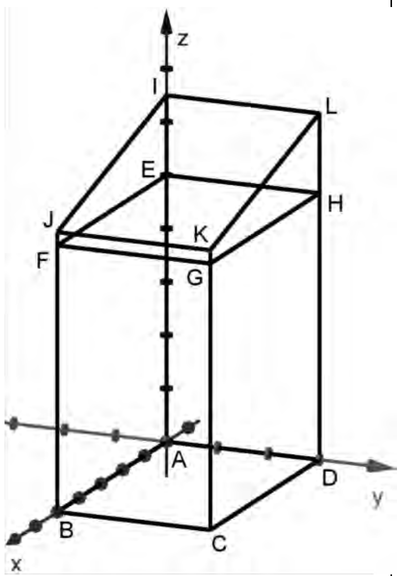
nicht Standardstufe 10: c), e)

Teil-aufg.	**BE**	**Leitideen**					**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungs-bereich**		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	2			X						I			X		
b	4	X	X	X			I	I			I		X		
c	2	X	X	X							II			X	
d	4	X	X	X				II			I	II		X	
e	3	X		X				II		I	II			X	
f	5	X		X			II	III			II				X

2019 – WTR 2

BE

Ein Haus kann modellhaft durch den abgebildeten Körper ABCDIJKL dargestellt werden. Das Dachgeschoss des Hauses entspricht dabei dem Prisma EFGHIJKL; der Teilkörper ABCDEFGH ist ein Quader. Der Teil der Fassade des Hauses, der durch das Viereck IEHL dargestellt wird, ist vollständig verglast; weitere Fenster hat das Dachgeschoss nicht.



Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|0)$, $G(10|6|10)$, $H(0|6|10)$ $K(10|6|10{,}5)$ und $L(0|6|13)$ gegeben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a Berechnen Sie das Volumen des Hauses. 3

b Geben Sie eine Gleichung der Symmetrieebene des Körpers ABCDIJKL an. Zeichnen Sie in die Abbildung die Seiten der Figur ein, in der diese Ebene den Körper schneidet. 2

c Untersuchen Sie für jede der beiden Ebenen $S: 3x - 5y = 0$ und $T: 3x + 5y = 0$, ob sie durch das Innere des Körpers ABCDIJKL verläuft. 3

Zur Gestaltung der Außenwände des Hauses werden verschiedene Farben zum Mischen gekauft. Die Einträge des Vektors $\vec{m} = \begin{pmatrix} w \\ r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ geben jeweils in Liter die Menge der weißen, roten, grünen und blauen Farbe an, die Einträge des Vektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2{,}50 \\ 3{,}40 \\ 3{,}50 \\ 3{,}20 \end{pmatrix}$ in entsprechender Reihenfolge jeweils den Preis für einen Liter Farbe in Euro.

d Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $\vec{m} \circ \vec{p}$ im Sachzusammenhang. 1

e Es gilt $\vec{m} \circ \vec{p} = 250$. Es wurde genau so viel Farbe gekauft, dass die weiße, rote, grüne und blaue Farbe im Verhältnis $12:1:2:3$ gemischt werden können. Berechnen Sie für jede Farbe die gekaufte Menge. 3

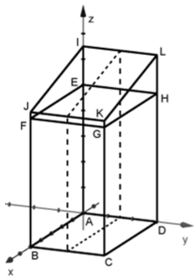
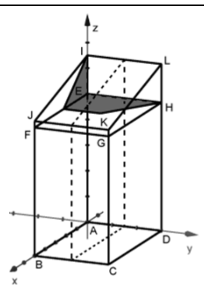
f Gemäß der Verordnung zur Berechnung der Wohnfläche werden die Grundflächen von Raumteilen, die höchstens einen Meter hoch sind, nicht angerechnet. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Bodenfläche des Dachgeschosses, für den diese Regelung gilt. 3

g Sonnenlicht, das zu einem bestimmten Zeitpunkt durch den verglasten Teil der Fassade in das Dachgeschoss einfällt, kann im Modell durch parallele Geraden mit dem 5

Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Einer der Eckpunkte des von der Sonne beschienenen Flächenstücks auf der Bodenfläche des Dachgeschosses liegt nicht am Rand der Bodenfläche. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der diesen Eckpunkt im Modell darstellt. Zeichnen Sie in die Abbildung alle von der Sonne beschienenen Flächenstücke im Dachgeschoss ein.

20

Erwartungshorizont

		BE
a	$10 \cdot 6 \cdot 10{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2{,}5 \cdot 6 = 705$, d. h. das Haus hat ein Volumen von etwa $700\,\text{m}^3$.	3
b	$y = 3$ 	2
c	S verläuft durch das Innere des Körpers, da die Koordinaten von A und G die Gleichung dieser Ebene erfüllen. T verläuft nicht durch das Innere des Körpers, da kein Punkt mit positiver x- und y-Koordinate die Gleichung dieser Ebene erfüllt.	3
d	Mit dem Term lässt sich der Gesamtpreis für die Farben berechnen.	1
e	$\begin{pmatrix} 12r \\ r \\ 2r \\ 3r \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2{,}50 \\ 3{,}40 \\ 3{,}50 \\ 3{,}20 \end{pmatrix} = 250 \Leftrightarrow 50r = 250 \Leftrightarrow r = 5$ Es wurden 60 Liter weiße, 5 Liter rote, 10 Liter grüne und 15 Liter blaue Farbe gekauft.	3
f	$\dfrac{\frac{1-0{,}5}{3-0{,}5} \cdot 10 \cdot 6}{10 \cdot 6} = 20\,\%$	3
g	Mit $z = 10$ ergibt sich: $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 1{,}5 \wedge x = 4{,}5 \wedge y = 3$ 	5
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (7), (8), (9)
f) 3.3.3 (5)

nicht Standardstufe 10: b), c), d), e), g)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X	X							I	I	I	X		
b	2		X	X				I		I	I		X		
c	3	X		X			II	II		II				X	
d	1	X							I	I		I	X		
e	3	X						II	II		II			X	
f	3	X	X	X				II		II	I			X	
g	5	X		X				III		III	II				X

2019 – CAS 1

BE

Ein Logistikunternehmen testet auf einer Strecke zwischen Festland und einer Insel die Paketzustellung mithilfe eines Flugkörpers, einer sogenannten Drohne. In einem kartesischen Koordinatensystem wird das horizontale Gelände, über dem sich die Drohne bewegt, modellhaft durch die x_1x_2-Ebene dargestellt, die Lage des Startplatzes durch den Punkt $S(7320\,|\,-1750\,|\,0)$ und die Lage des regulären Landeplatzes durch den Punkt $L(-990\,|\,6990\,|\,0)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

Die Drohne soll über dem Startplatz zunächst vertikal aufsteigen, bis sie eine Höhe von 50 m erreicht hat, und anschließend geradlinig in konstanter Höhe und mit konstanter Geschwindigkeit in die Richtung des Landeplatzes fliegen.

a Begründen Sie, dass die vorgesehene horizontale Flugbahn der Drohne im Modell entlang der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ verläuft. 2

100 Sekunden nachdem die Drohne die Höhe von 50 m erreicht hat, wird ihre Position durch den Punkt $P(6489\,|\,-876\,|\,50)$ dargestellt.

b Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der die Position der Drohne nach weiteren 200 Sekunden Flugzeit auf der vorgesehenen Flugbahn darstellt. 2

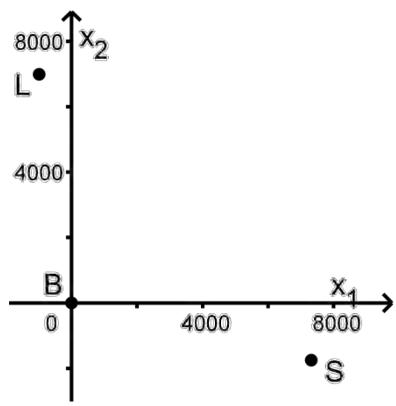
c Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne während des horizontalen Flugs. 2

Die Drohne soll ihren Weg zum Landeplatz selbstständig zurücklegen können. Während der Testphase wird ihr Flug jedoch von einer Bodenstation aus überwacht und die Flugbahn bei Bedarf korrigiert. Die Position der Bodenstation wird durch den Punkt $B(0\,|\,0\,|\,0)$ dargestellt, ihre Reichweite beträgt 6000 m.

d Untersuchen Sie, ob sich die Drohne in der durch den Punkt P dargestellten Position innerhalb oder außerhalb der Reichweite der Bodenstation befindet. 2

e Bewegt sich die Drohne auf der vorgesehenen Flugbahn, so befindet sie sich von einem bestimmten Zeitpunkt an innerhalb der Reichweite der Bodenstation. Ermitteln Sie die Position, in der sich die Drohne zu diesem Zeitpunkt befindet. 4

f In einer Position auf der vorgesehenen Flugbahn hat die Drohne die geringste Entfernung zur Bodenstation; diese Position wird durch den Punkt R beschrieben. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem unter Verwendung der Abbildung die Koordinaten von R ermittelt werden könnten. 2



Einer Korrektur der Bodenstation folgend weicht die Drohne im Modell im Punkt $Q(3996\,|\,1746\,|\,50)$ von der vorgesehenen Flugbahn ab und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $5\,\frac{m}{s}$ geradlinig auf einen Ausweichlandeplatz zu, der durch den Punkt $A(4050\,|\,1810\,|\,0)$ dargestellt wird.

g	Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Flugbahn gegenüber dem Gelände beim Anflug auf den Ausweichlandeplatz.	3
h	Berechnen Sie, um wie viele Meter sich die Flughöhe pro Sekunde verringert.	3
		20

Erwartungshorizont

		BE
a	Der Punkt $(7320\,|\,-1750\,|\,50)$ stellt die Position der Drohne 50 m vertikal über dem Startplatz dar. $\overrightarrow{SL} = \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$	2
b	$\begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + 0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4827 \\ 872 \\ 50 \end{pmatrix}$, d. h. der Punkt hat die Koordinaten $(4827\,|\,872\,|\,50)$.	2
c	$\frac{1}{100} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 6489 \\ -876 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} \right\| \approx 12$, d. h. die Geschwindigkeit beträgt etwa $12\,\frac{m}{s}$.	2
d	$\left\|\overrightarrow{PB}\right\| > 6000$, d. h. die Drohne befindet sich außerhalb der Reichweite der Bodenstation.	2
e	$\left\| \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 6000$ liefert $r_1 \approx 0{,}1601$ und $r_2 \approx 0{,}8867$. Damit wird die gesuchte Position näherungsweise durch den Punkt $(5990\,|\,-351\,|\,50)$ dargestellt.	4
f	Der Fußpunkt des Lots von B auf $\overline{SL}$ liefert die x_1- und x_2-Koordinate von R, die x_3-Koordinate ist 50.	2
g	Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $\sin\varphi = \frac{\overrightarrow{QA} \circ \vec{n}}{\left\|\overrightarrow{QA}\right\| \cdot \left\|\vec{n}\right\|}$: $\varphi \approx -31°$ Die Größe des Neigungswinkels beträgt etwa 31°.	3
h	$\frac{50}{\left\|\overrightarrow{QA}\right\|} \cdot 5\,\frac{m}{s} \approx 2{,}6\,\frac{m}{s}$, d. h. die Flughöhe verringert sich pro Sekunde um etwa 2,6 Meter.	3

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (12), (14)
b) 3.3.3 (12), (14)
c) 3.3.2 (10), (14)
d) 3.3.2 (9), (14)
f) 3.3.3 (5)
h) 3.3.2 (10);

nicht Standardstufe 10: e), g)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X	X	X			I		I			I	X		
b	2	X	X	X	X			I	I		I		X		
c	2	X	X	X				II	II		I			X	
d	2	X	X	X					I		I	I	X		
e	4	X	X	X				II	II		II			X	
f	2			X			III			II		III			X
g	3	X	X	X					I		II	I		X	
h	3	X	X	X				III	III		II				X

2019 – CAS 2

BE

Die Abbildung zeigt ein Gebäude des Flughafens von Palma de Mallorca. Im eingezeichneten kartesischen Koordinatensystem kann die 140 Meter lange Dachkonstruktion modellhaft durch einen halben Zylinder und drei Prismen zusammengesetzt werden; die dreieckigen Grundflächen dieser Prismen sind kongruent.

Der Boden des Gebäudes sowie die Startbahnen des Flughafens liegen im Modell in der xy-Ebene. Die Seitenkanten der Prismen verlaufen parallel zur y-Achse. Die Punkte $A(7|0|4)$, $B(0|0|4)$ und $C(3{,}5|0|7{,}5)$ sind Eckpunkte eines der Prismen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und im Punkt C rechtwinklig ist. 3

b Bestimmen Sie das Volumen der gesamten Dachkonstruktion. 3

Der Abbildung liegt ein Foto zugrunde. Die Position der Kamera, mit der dieses Foto aufgenommen wurde, wird durch den Punkt $K(30|20|1{,}5)$ dargestellt. Die weiße Dachfläche, die mit dem Schriftzug „Aeropuerto de Palma de Mallorca" versehen ist, liegt im Modell in der Ebene E.

c Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $E: x+z=11$)

d Eine Sichtlinie verläuft von der Kamera geradlinig zum Mittelpunkt der weißen Dachfläche. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den diese Sichtlinie mit der Dachfläche einschließt. 4

Hinter dem Gebäude startet ein Flugzeug. Ab einer bestimmten Höhe über der Startbahn ist die Flugzeugspitze von der Position der Kamera aus oberhalb des Gebäudes sichtbar. Im Folgenden soll diese Höhe ermittelt werden.

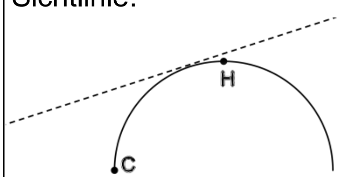
e Begründen Sie anhand einer geeignet beschrifteten Skizze, dass diejenigen Punkte der Dachkonstruktion, die am höchsten über dem Boden des Gebäudes liegen, für die Ermittlung der gesuchten Höhe keine Rolle spielen. 2

f Von der Position der Kamera aus wird die Flugzeugspitze unmittelbar oberhalb derjenigen Punkte der Dachkonstruktion sichtbar, die im Modell näherungsweise auf der 5

Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 0 \\ 10{,}9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen. Die Spitze des startenden Flugzeugs bewegt sich im Modell entlang der Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -60 \\ -990 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 350 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie die gesuchte Höhe.

20

Erwartungshorizont

		BE
a	$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$, $\lvert\overrightarrow{CA}\rvert = \lvert\overrightarrow{CB}\rvert$, $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 0$	3
b	$\left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 3{,}5^2 \cdot \pi\right) \cdot 140 \approx 7839$, d. h. das Volumen beträgt etwa $7800\,m^3$.	3
c	$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{CA} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t,u \in \mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x = 7 + 3{,}5t$ II $y = -u$ III $z = 4 - 3{,}5t$ liefert $x + z = 11$.	3
d	Der Mittelpunkt der Dachfläche wird durch den Punkt $M(5{,}25 \mid -70 \mid 5{,}75)$ dargestellt. Mit $\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} 24{,}75 \\ 90 \\ -4{,}25 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\sin\varphi = \frac{\overrightarrow{MK} \circ \vec{n}}{\lvert\overrightarrow{MK}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert}$, d. h. $\varphi \approx 8{,}9°$	4
e	H stellt einen der Punkte der Dachkonstruktion dar, die am höchsten über dem Boden des Gebäudes liegen, die gestrichelte Linie eine von der Kamera ausgehende Sichtlinie.  	2
f	Gerade durch K und die Punkte, die die Positionen der Flugzeugspitze beschreiben: $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + v \cdot \left(\left(\begin{pmatrix} -60 \\ -990 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 350 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}\right);\ v \in \mathbb{R}$	5

$$\begin{pmatrix}30\\20\\1,5\end{pmatrix}+v\cdot\left(\begin{pmatrix}-60\\-990\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1000\\0\\350\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}30\\20\\1,5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1,1\\0\\10,9\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$ liefert $s\approx 1,244$.

Damit ergibt sich eine Höhe von etwa $1,244\cdot 350\,\text{m}\approx 435\,\text{m}$.

20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: b) 3.3.2 (7), (8)
e) 3.3.3 (5)

nicht Standardstufe 10: a), c), d), f)

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X	X	X			I			I	I		X		
b	3	X	X	X				I		I	I		X		
c	3	X		X						I	II	I		X	
d	4	X	X	X					I	I	II			X	
e	2			X			II			II		I		X	
f	5	X		X				III	III		III				X

2020 – WTR 1

BE

1 In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1|1|2)$, $B(-1|5|2)$ und $C(-4|3|3)$ gegeben. Das Dreieck ABC stellt modellhaft ein Sonnensegel dar, das zwischen drei Masten gespannt ist. Der horizontale Untergrund wird durch die x_1x_2-Ebene beschrieben. Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a Eine Gleichung der Ebene, die das Dreieck ABC enthält, hat die Form $x_1 + 3x_3 = j$. Bestimmen Sie den Wert von j. 1

b Damit Regenwasser gut abfließen kann, soll das Segel so gespannt sein, dass es eine Neigung von mindestens 30 % aufweist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. 4

c Die Seite des Segels, die parallel zum Untergrund verläuft, ist zum betrachteten Zeitpunkt 4 % länger als vor dem ersten Aufspannen des Segels. Berechnen Sie die Länge, die diese Seite vor dem vor dem ersten Aufspannen hatte. 3

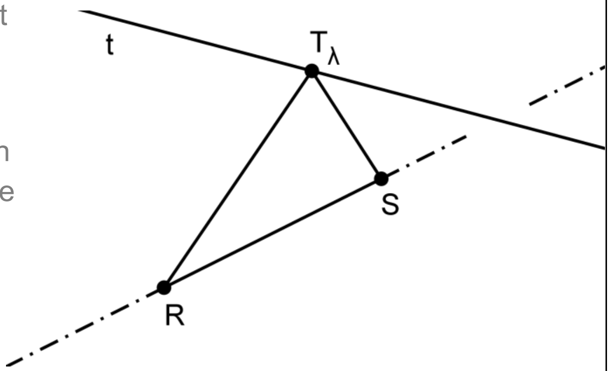
Auf das Segel trifft Sonnenlicht. Die zu den beiden unteren Eckpunkten des Segels gehörenden Eckpunkte seines Schattens auf dem Untergrund werden durch $A'(-5|3|0)$ und $B'(-5|7|0)$ dargestellt.

d Ermitteln Sie im Modell die Koordinaten des Schattens des oberen Eckpunkts des Segels. 5

(zur Kontrolle: $(-10|6|0)$)

e Stellen Sie den Schatten des Segels in der x_1x_2-Ebene grafisch dar und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt. 3

2 Die Abbildung zeigt die Gerade $t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, die die Gerade durch die Punkte $R(-1|2|3)$ und $S(-1|4|3)$ nicht schneidet. Zu jedem Wert von λ gehört ein Punkt T_λ von t. Jeder Punkt T_λ hat von R und S den gleichen Abstand. 4



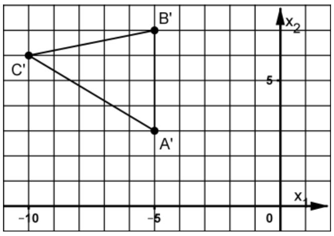
Unter den Dreiecken RST_λ hat eines den kleinsten Flächeninhalt. Begründen Sie, dass der zugehörige Wert von λ die Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 0 \\ -4+3\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

20

Erwartungshorizont

BE

1	**a**	Da A in der Ebene liegt, gilt $j=-1+3\cdot 2=5$.	1
	b	$\cos\alpha=\dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ liefert $\tan\alpha=\frac{1}{3}>30\,\%$, die Bedingung ist also erfüllt.	4
	c	$\frac{1}{1{,}04}\cdot\lvert\overline{AB}\rvert=\frac{4}{1{,}04}\approx 3{,}85$, d. h. die betrachtete Seite war etwa 3,85 m lang.	3
	d	Der gesuchte Punkt hat die x_3-Koordinate 0. Das Sonnenlicht kann durch den Vektor $\overrightarrow{AA'}$ beschrieben werden. $\overrightarrow{OC}+\mu\cdot\overrightarrow{AA'}=\begin{pmatrix}-4\\3\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$ liefert $\mu=1{,}5$, $x_1=-10$ und $x_2=6$.	5
	e	$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10$, d. h. der Flächeninhalt des Schattens beträgt $10\,m^2$. 	3
2		Die Dreiecke RST_λ sind gleichschenklig mit der Basis $\overline{RS}$. Bezeichnet man den Mittelpunkt $(-1\,\lvert\,3\,\rvert\,3)$ von $\overline{RS}$ mit M, so ist ihr Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot\lvert\overline{RS}\rvert\cdot\lvert\overline{MT_\lambda}\rvert$. Dieser ist genau dann am kleinsten, wenn $\lvert\overline{MT_\lambda}\rvert$ am kleinsten ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\overline{MT_\lambda}$ senkrecht zu t steht, also $\overrightarrow{MT_\lambda}$ senkrecht zum Richtungsvektor von t.	4
			20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: 1c) 3.3.2 (10)
1d) 3.3.3 (12), (14)
1e) 3.3.3 (5)

nicht Standardstufe 10: 1a), b), 2

Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Anforderungsbereich I	II	III
1 a	1				I	I		X		
b	4		II	I		II			X	
c	3			I		I	I	X		
d	5		II	II		I	I		X	
e	3			I	I	I		X		
2	4	III	III		II	II	III			X

(K1–K6: allgemeine mathematische Kompetenzen)

2020 – CAS 1

BE

1 In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1|1|2)$, $B(-1|5|2)$ und $C(-4|3|3)$ gegeben. Das Dreieck ABC stellt modellhaft ein Sonnensegel dar, das zwischen drei Masten gespannt ist. Der horizontale Untergrund wird durch die x_1x_2-Ebene beschrieben. Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, die das Dreieck ABC enthält, in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $x_1 + 3x_3 = 5$)

b Damit Regenwasser gut abfließen kann, soll das Segel so gespannt sein, dass es eine Neigung von mindestens 30 % aufweist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. 3

c Die Seite des Segels, die parallel zum Untergrund verläuft, ist zum betrachteten Zeitpunkt 4 % länger als vor dem ersten Aufspannen des Segels. Berechnen Sie die Länge, die diese Seite vor dem vor dem ersten Aufspannen hatte. 3

Auf das Segel trifft Sonnenlicht. Die zu den beiden unteren Eckpunkten des Segels gehörenden Eckpunkte seines Schattens auf dem Untergrund werden durch $A'(-5|3|0)$ und $B'(-5|7|0)$ dargestellt.

d Ermitteln Sie im Modell die Koordinaten des Schattens des oberen Eckpunkts des Segels. 4

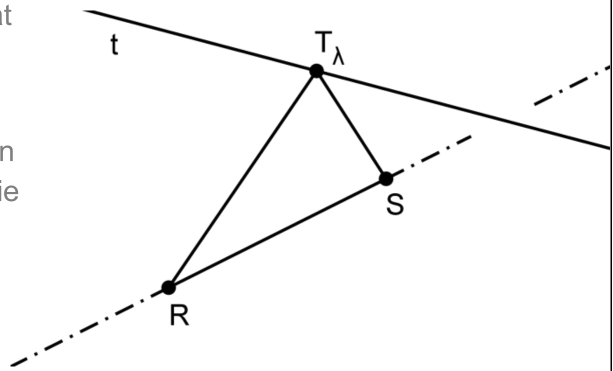
(zur Kontrolle: $(-10|6|0)$)

e Stellen Sie den Schatten des Segels in der x_1x_2-Ebene grafisch dar und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt. 3

2 Die Abbildung zeigt die Gerade $t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, die die Gerade durch die Punkte $R(-1|2|3)$ und $S(-1|4|3)$ nicht schneidet. Zu jedem Wert von λ gehört ein Punkt T_λ von t. Jeder Punkt T_λ hat von R und S den gleichen Abstand. 4

Unter den Dreiecken RST_λ hat eines den kleinsten Flächeninhalt. Begründen Sie, dass der zugehörige Wert von λ die Lösung der folgenden Gleichung ist:

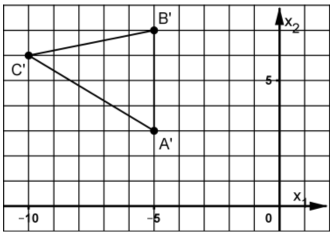
$$\begin{pmatrix} -1-\lambda \\ 0 \\ -4+3\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$



20

Erwartungshorizont

BE

1	**a**	$\overrightarrow{AB}\circ\vec{n}=0 \wedge \overrightarrow{AC}\circ\vec{n}=0$ liefert $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene. Damit hat die Gleichung der Ebene die Form $x_1+3x_3=c$. Da A in der Ebene liegt, gilt $c=5$.	3
	b	Mit $\vec{m}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\cos\alpha=\frac{\lvert\vec{n}\circ\vec{m}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{m}\rvert}$ ergibt sich $\tan\alpha=\frac{1}{3}>30\,\%$, die Bedingung ist also erfüllt.	3
	c	$\frac{1}{1{,}04}\cdot\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\frac{4}{1{,}04}\approx 3{,}85$, d. h. die betrachtete Seite war etwa $3{,}85\,\text{m}$ lang.	3
	d	Der gesuchte Punkt hat die x_3-Koordinate 0. Das Sonnenlicht kann durch den Vektor $\overrightarrow{AA'}$ beschrieben werden. $\overrightarrow{OC}+\mu\cdot\overrightarrow{AA'}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$ liefert $x_1=-10$ und $x_2=6$.	4
	e	$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10$, d. h. der Flächeninhalt des Schattens beträgt $10\,\text{m}^2$.  	3
2		Die Dreiecke RST_λ sind gleichschenklig mit der Basis $\overline{RS}$. Bezeichnet man den Mittelpunkt $(-1\,\vert\,3\,\vert\,3)$ von $\overline{RS}$ mit M, so ist ihr Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot\left\lvert\overline{RS}\right\rvert\cdot\left\lvert\overline{MT_\lambda}\right\rvert$. Dieser ist genau dann am kleinsten, wenn $\left\lvert\overline{MT_\lambda}\right\rvert$ am kleinsten ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\overline{MT_\lambda}$ senkrecht zu t steht, also $\overrightarrow{MT_\lambda}$ senkrecht zum Richtungsvektor von t.	4
			20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: 1c) 3.3.2 (10)
1d) 3.3.3 (12), (14)
1e) 3.3.3 (5)

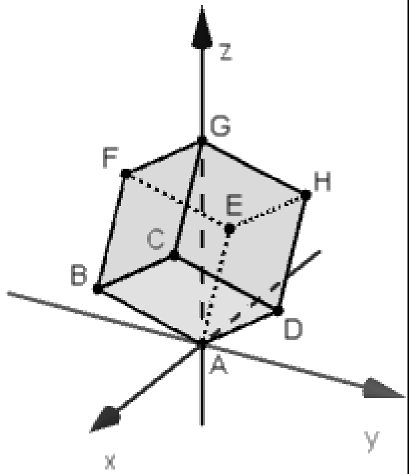
nicht Standardstufe 10: 1a), b), 2

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3					II			X	
b	3		II	I		II			X	
c	3			I		I	I	X		
d	4		II	II		I	I		X	
e	3			I	I	I		X		
2	4	III	III		II	II	III			X

2020 – CAS 2

BE

Betrachtet wird der abgebildete Würfel mit $A(0|0|0)$, $B(3|-3|3)$, $G(0|0|9)$ und $H(-3|3|6)$.



a Berechnen Sie das Volumen des Würfels. 2

b Begründen Sie, dass das Viereck ABGH ein Rechteck ist. Zeichnen Sie das Rechteck in die Abbildung ein und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts seiner Diagonalen an. 4

c Das Viereck ABGH liegt in der Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $x+y=0$)

d Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Ebene L mit der xz-Ebene einschließt. 2

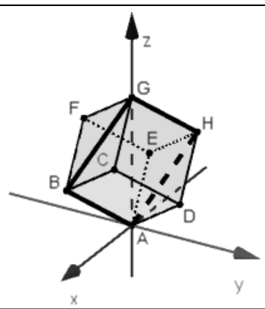
e Betrachtet wird der Term $\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BG}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, wobei M der Mittelpunkt von $\overline{BG}$ ist. 4

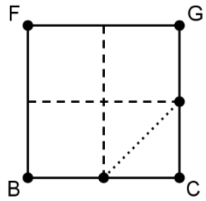
Geben Sie die Bedeutung des Terms im Zusammenhang mit dem Würfel an und begründen Sie Ihre Angabe.

f Die Ebene, die durch die Mittelpunkte der Kanten $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{AD}$ und $\overline{DH}$ verläuft, teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass das Volumen des kleineren Teilkörpers ein Achtel des Volumens des Würfels ist. 5

20

Erwartungshorizont

		BE
a	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^3=81\sqrt{3}$	2
b	$\overline{AB}$ und $\overline{GH}$ sind als Kanten, $\overline{AH}$ und $\overline{BG}$ als Seitendiagonalen eines Würfels gleich lang. $\overline{BG}$ liegt in der Seitenfläche BFGC und steht damit senkrecht zu $\overline{AB}$. Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks: $(0\|0\|4{,}5)$  	4
c	$\overrightarrow{AB}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{AG}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ liefert $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ als Normalenvektor von L. Da A in L liegt, ergibt sich für die gesuchte Gleichung $x+y=0$.	3

d	Da L die z-Achse enthält und den Winkel halbiert, den die positive x-Achse und die negative y-Achse einschließen, beträgt die Größe des gesuchten Winkels 45°.	2
e	Mithilfe des Terms lässt sich der Vektor $\overrightarrow{AC}$ bestimmen. Begründung: $\frac{1}{2}\cdot\left\lvert\overrightarrow{BG}\right\rvert$ ist die Hälfte der Länge der Seitendiagonale des Würfels, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ein Vektor der Länge 1, der senkrecht zu L steht. Damit gilt $\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\cdot\left\lvert\overrightarrow{BG}\right\rvert\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$.	4
f	Der kleinere Teilkörper ist ein gerades Prisma. Die Grundfläche des Prismas ist eine Teilfläche der Seitenfläche BFGC; der Inhalt dieser Teilfläche ist ein Achtel des Inhalts der Seitenfläche BFGC. Die Höhe des Prismas stimmt mit der Kantenlänge des Würfels überein. 	5
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (10)
b) 3.3.3 (10)
e) 3.3.2(9), 3.3.3 (12)
f) 3.3.3 (5)

nicht Standardstufe 10: c), d)

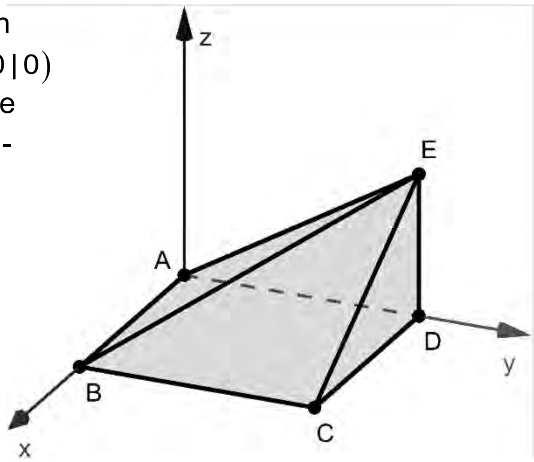
Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungsbereich**		
		K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	2					I		X		
b	4	I			I	I		X		
c	3					II			X	
d	2					II			X	
e	4	III	III		II		II			X
f	5	II			II		II		X	

2021 – WTR 1 und CAS 1

BE

Die Eckpunkte eines Holzkörpers werden durch $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(10|10|0)$, $D(0|10|0)$ und $E(0|10|6)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Die Punkte B, D und E liegen im Modell in der Symmetrieebene des Körpers.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter in der Realität.



a Zeigen Sie, dass das Dreieck BCE rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Holzkörpers. 5

b Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene L, in der das Dreieck BCE liegt, in Koordinatenform. 3

c Die quadratische Grundfläche des Holzkörpers schließt mit der Seitenfläche, die durch das Dreieck BCE dargestellt wird, einen Winkel ein. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels. 2

d Der Holzkörper soll mit einer möglichst kurzen Linie versehen werden, die im Modell vom Eckpunkt A über die Kante $\overline{BE}$ zum Punkt C verläuft. Die Länge dieser Linie in Zentimetern kann folgendermaßen ermittelt werden: 4

$P(10-10t\,|\,10t\,|\,6t)$

$\overrightarrow{PC} \circ \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{59}$

$2 \cdot \left|\overrightarrow{PC}\right| \approx 15,2$

Erläutern Sie dieses Vorgehen.

Der Schnittpunkt der Ebene L mit der z-Achse wird mit F bezeichnet.

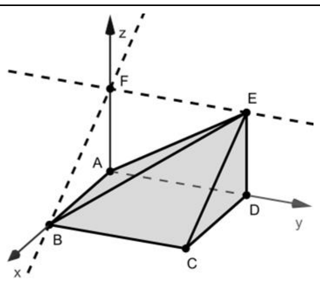
e Zeichnen Sie F sowie die Geraden, in denen L die xz- und die yz-Ebene schneidet, in die Abbildung ein. 2

f Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Körpers ABCDEF größer ist als das Volumen des Körpers ABCDE, ohne für diese Volumina konkrete Werte zu berechnen. 4

20

Erwartungshorizont

BE

a	$\overrightarrow{CB}\circ\overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-10\\0\\6\end{pmatrix}=0$ $10^2+10\cdot\left|\overrightarrow{CE}\right|+10\cdot 6=160+10\cdot\sqrt{136}\approx 277$, d. h. der Inhalt der Oberfläche beträgt etwa $277\,cm^2$.	5
b	$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}+r\cdot\overrightarrow{CB}+s\cdot\overrightarrow{CE}$ liefert $x=10-10s$, $y=10-10r$ und $z=6s$. Damit ergibt sich $x=10-\frac{5}{3}z$.	3
c	$\tan\varphi=\frac{\left|\overline{DE}\right|}{\left|\overline{CD}\right|}=\frac{6}{10}$, d. h. $\varphi\approx 31°$	2
d	Bezeichnet man im Modell denjenigen Punkt der gesuchten Linie, der auf $\overline{BE}$ liegt, mit P, so ist die Länge der Linie aufgrund der Symmetrie des Körpers $2\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|$. Da die Linie möglichst kurz sein soll, steht $\overline{PC}$ senkrecht zu $\overline{PB}$.	4
e		2
f	Volumen des Körpers ABCDE: $V=\frac{1}{3}\cdot\left|\overline{AB}\right|^2\cdot\left|\overline{DE}\right|$ Volumen des Körpers ABCDEF: $\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|^2\cdot\left|\overline{DE}\right|=\frac{3}{2}\cdot V=V+50\,\%\cdot V$	4
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (7) zweiter Teil
c) 3.3.3 (6)
f) 3.3.2 (7)

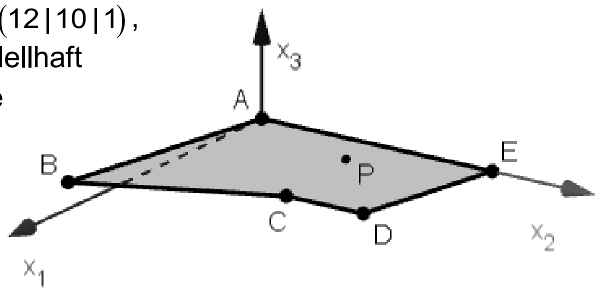
Nicht Standardstufe 10: a) erster Teil, b) , d), e)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	5			I	I	I		X		
b	3					II			X	
c	2			I	II	I			X	
d	4	III		II	III		II			X
e	2				I		I	X		
f	4	II			I	I			X	

2021 – WTR 2

BE

Die Punkte $A(0|0|0)$, $B(18|0|1{,}5)$, $C(12|10|1)$, $D(12|15|1)$ und $E(0|15|0)$ stellen modellhaft die Eckpunkte einer ebenen Rasenfläche dar (vgl. Abbildung). Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$ sind parallel.



Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.

a Zeigen Sie, dass auch $\overline{AE}$ und $\overline{CD}$ parallel sind und dass $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$ einen rechten Winkel einschließen. 3

b Ausgehend vom Ansatz $\left|\overline{AE}\right| \cdot \left|\overline{DE}\right| + \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{DE}\right|\right) \cdot \left(\left|\overline{AE}\right| - \left|\overline{CD}\right|\right)$ kann eine Größe berechnet werden, die im betrachteten Sachzusammenhang eine Rolle spielt. Nennen Sie diese Größe und erläutern Sie den gegebenen Ansatz. 4

Die Rasenfläche wird von einem Roboter gemäht, der die Form eines flachen Zylinders hat. Zur Beschreibung der Bewegung des Roboters wird der Mittelpunkt seiner kreisförmigen Unterseite betrachtet, die einen Radius von 20 cm hat. Es soll vereinfachend davon ausgegangen werden, dass dieser Mittelpunkt die Rasenfläche berührt.

Die Position des Mittelpunkts wird zunächst durch $P(3{,}6|8|0{,}3)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Die anschließende Bewegung des Mittelpunkts verläuft im Modell entlang der Gerade g, die durch P verläuft und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat. Dabei bewegt sich der Roboter auf den durch $\overline{BC}$ dargestellten Rand der Rasenfläche zu.

c Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts Q, in dem g die Strecke $\overline{BC}$ schneidet. 5

(zur Kontrolle: Q(15,6 | 4 | 1,3))

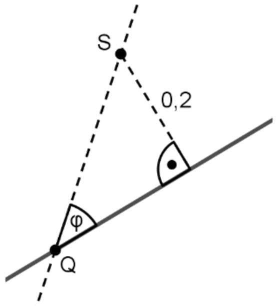
d Weisen Sie nach, dass der Winkel, unter dem sich der Roboter dem Rand der Rasenfläche nähert, etwa 41° groß ist. 3

e Der Roboter ändert seine Richtung, sobald der Rand seiner Unterseite den Rand der Rasenfläche erreicht. Der Punkt, der die Position des Mittelpunkts im Moment der Richtungsänderung darstellt, wird mit S bezeichnet. Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Skizze die Koordinaten von S. 5

20

Erwartungshorizont

BE

a	$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \circ \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$	3
b	Ausgehend vom gegebenen Ansatz kann der Inhalt der Rasenfläche berechnet werden. Im Modell kann die Fläche zerlegt werden in ein Rechteck mit den Seitenlängen $\left\|\overline{AE}\right\|$ und $\left\|\overline{DE}\right\|$ sowie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen $\left\|\overline{AB}\right\| - \left\|\overline{DE}\right\|$ und $\left\|\overline{AE}\right\| - \left\|\overline{CD}\right\|$ haben.	4
c	$\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 8 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem: I $12\lambda + 6\mu = 14{,}4$ II $4\lambda + 10\mu = 8$ III $\lambda + 0{,}5\mu = 1{,}2$ Aus I und II ergibt sich $48\lambda = 48 \Leftrightarrow \lambda = 1$ und damit $Q(15{,}6 \mid 4 \mid 1{,}3)$.	5
d	$\cos\varphi = \dfrac{\left\| \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{36+100+0{,}25} \cdot \sqrt{144+16+1}}$ liefert $\varphi \approx 41°$.	3
e	 $\left\|\overline{QS}\right\| = \frac{0{,}2}{\sin\varphi}$ $\begin{pmatrix} 15{,}6 \\ 4 \\ 1{,}3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{144+16+1}} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left\|\overline{QS}\right\| \approx \begin{pmatrix} 15{,}3 \\ 4{,}1 \\ 1{,}3 \end{pmatrix}$	5
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (11) erster Teil
b) 3.3.2 (10)
c) 3.3.3 (13)
e) 3.3.3 (6), 3.3.3 (12)

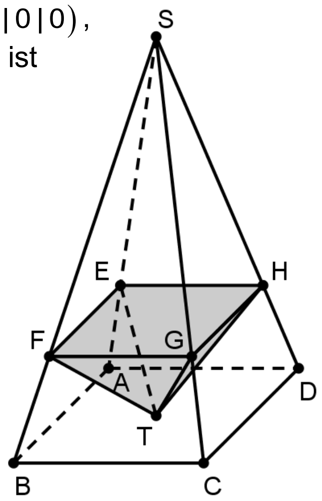
Nicht Standardstufe 10: a) zweiter Teil; d)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I				I		X		
b	4	I		I	I		I	X		
c	5		I			II			X	
d	3			I		II	I		X	
e	5		III	II	II	III	II			X

2021 – CAS 2

BE

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS mit $A(0|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(2|2|0)$, $D(0|2|0)$ und $S(1|1|4)$. Die Grundfläche ABCD ist quadratisch.



a Begründen Sie, dass die Pyramide ABCDS gerade ist, und berechnen Sie den Inhalt ihrer Oberfläche. 6

b Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Seitenfläche ABS gegenüber der Grundfläche ABCD. 3

c Der Mittelpunkt der Kante $\overline{CD}$ wird mit M bezeichnet. Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P auf der Kante $\overline{DS}$ gibt, für den das Dreieck BMP rechtwinklig ist. 5

Die Ebene mit der Gleichung $x_3 = 1$ schneidet die vier vom Punkt S ausgehenden Kanten der Pyramide ABCDS in den Punkten E, F, G und H (vgl. Abbildung). Der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche ABCD wird mit T bezeichnet.

d Gegeben ist die folgende Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den betrachteten geometrischen Objekten: 3

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ liefert } \sigma = \tfrac{1}{4} \text{ und damit } x_1 = 1{,}75 \text{ und } x_2 = 0{,}25.$$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an und erläutern Sie den Ansatz der gegebenen Lösung.

e Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide EFGHT. 3

20

Erwartungshorizont

		BE
a	Die Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Schnittpunkt ihrer Diagonalen hat die gleichen x_1- und x_2-Koordinaten wie S. Mit dem Mittelpunkt $M(2\|1\|0)$ von $\overline{BC}$ ergibt sich für den Inhalt der Oberfläche $2 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left\|\overrightarrow{MS}\right\| = 4 + 4\sqrt{17}$.	6
b	$\tan\varphi = \frac{\left\|\overrightarrow{ST}\right\|}{\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$ liefert $\varphi \approx 76°$.	3
c	Der Mittelpunkt von $\overline{CD}$ ist $M(1\|2\|0)$. Gleichung der Gerade durch D und S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$	5

	Ein möglicher Punkt P hat die Form $(r \mid 2-r \mid 4r)$ mit $0 \le r \le 1$. Es gilt $\overrightarrow{MB} \circ \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$, d. h. es gibt einen solchen Punkt.	
d	Aufgabenstellung: „Bestimmen Sie die x_1- und die x_2-Koordinate von F.“ Der Ansatz liefert den Punkt auf der Gerade durch B und S, der die x_3-Koordinate 1 hat.	3
e	Mit $F(1{,}75 \mid 0{,}25 \mid 1)$ und $G(1{,}75 \mid 1{,}75 \mid 1)$ ergibt sich $\frac{1}{3} \cdot \left\|\overline{FG}\right\|^2 \cdot 1 = \frac{3}{4}$.	3
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (7), (9), 3.3.3 (10)
b) 3.3.3 (6)
d) 3.3.3 (12)
e) 3.3.2 (7), (9)

Nicht Standardstufe 10: c)

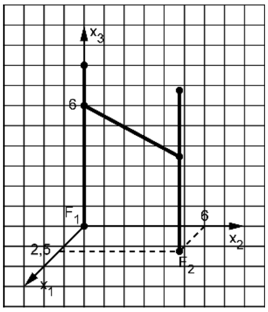
Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	6	I	I		I	I		X		
b	3				II	I			X	
c	5	II	III		II	II				X
d	3	II			II		II		X	
e	3	II	II		I	I			X	

2022 – WTR 1

	BE
Ein Element eines Klettergartens ist eine ebene, viereckige Kletterwand. In einem Koordinatensystem können die Eckpunkte der Kletterwand durch die Punkte $A(6\,|\,7\,|\,4)$, $B(10\,|\,5\,|\,5)$, $C(9\,|\,5{,}5\,|\,8)$ und $D(5\,|\,7{,}5\,|\,7)$ beschrieben werden. Die x_1x_2-Ebene stellt den horizontalen Boden dar. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.	
a Weisen Sie nach, dass die Kletterwand die Form eines Parallelogramms hat, aber nicht rechteckig ist.	3
b Zeigen Sie, dass die Kletterwand vertikal ausgerichtet ist.	3
c Auf der Kletterwand verläuft eine horizontale Linie, die im Modell den Punkt D enthält. Diese Linie teilt die Wand in zwei Teile. Begründen Sie, dass der Flächeninhalt des unteren Teils größer ist als der des oberen Teils.	3
Ein anderes Element des Klettergartens ist ein Stahlseil, das zwischen zwei vertikal stehenden, acht Meter hohen Masten gespannt ist. Der Fußpunkt des ersten Masts wird durch $F_1(0\,|\,0\,|\,0)$ dargestellt, der Fußpunkt des zweiten Masts durch $F_2(2{,}5\,|\,6\,|\,0)$. Das Seil ist am ersten Mast in einer Höhe von 6 m befestigt, am zweiten Mast in einer Höhe von 4,7 m. Es soll davon ausgegangen werden, dass das Seil geradlinig verläuft.	
d Stellen Sie die beiden Masten und das Seil in einem dreidimensionalen Koordinatensystem dar.	3
e Bestimmen Sie die Neigung des Seils zwischen den beiden Masten in Prozent.	3
f Über das bisher betrachtete Seil hinweg ist ein zweites Stahlseil gespannt. Dieses obere Seil verläuft im Modell entlang der Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Ein Punkt des oberen Seils liegt vertikal über einem Punkt des unteren Seils. Ermitteln Sie den Abstand dieser beiden Punkte.	5
	20

Erwartungshorizont

		BE
a	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$	3
b	Bezeichnet man einen Normalenvektor der Ebene, in der die Punkte A, B und D liegen, mit $\vec{n}$, so liefern $\overrightarrow{AB} \circ \vec{n} = 0$ und $\overrightarrow{AD} \circ \vec{n} = 0$ das folgende Gleichungssystem: I $4n_1 - 2n_2 + n_3 = 0$ II $-n_1 + 0{,}5n_2 + 3n_3 = 0 \Leftrightarrow -4n_1 + 2n_2 + 12n_3 = 0$	3

	Damit gilt $n_3 = 0$, d. h. der Normalenvektor der Ebene steht senkrecht zum Normalenvektor der x_1x_2-Ebene.	
c	Eine gedachte gerade Linie zwischen den durch D und B dargestellten Eckpunkten der Kletterwand teilt diese in zwei Teile mit gleichem Flächeninhalt. Da die x_3-Koordinate von D größer ist als die von B, verläuft die horizontale Linie oberhalb der gedachten Linie.	3
d		3
e	$\left\lvert\overrightarrow{F_1F_2}\right\rvert = \left\lVert\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rVert = 6{,}5$ $\frac{6-4{,}7}{6{,}5} = 20\,\%$	3
f	Die Gerade, mit deren Hilfe sich das untere Seil beschreiben lässt, kann durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 6 \\ -1{,}3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Da die beiden beschriebenen Punkte im Modell die gleiche x_2-Koordinate haben, gilt $6s = 3$, d. h. $s = 0{,}5$. Der untere Punkt liegt also in einer Höhe von 5,35 m. Das obere Seil verläuft horizontal in einer Höhe von 8 m, der gesuchte Abstand beträgt also 2,65 m.	5
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (8) erster Teil
d) 3.3.3 (9)
e) 3.3.2 (9)
f) 3.3.2 (9), 3.3.3 (12)

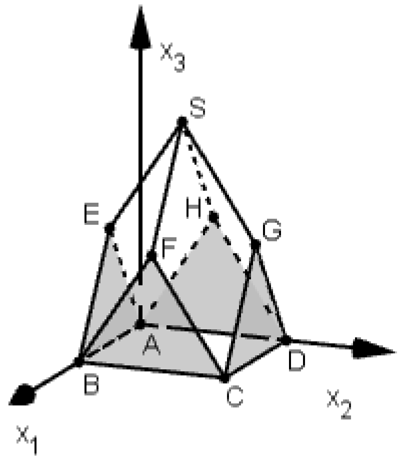
Nicht Standardstufe 10: a) zweiter Teil, b), c)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I				I		X		
b	3		I	I		II			X	
c	3	II		II			I		X	
d	3				I			X		
e	3		II	I		I	I		X	
f	5	II	III	II	II	I	II			X

2022 – WTR 2

	BE

Die Abbildung zeigt modellhaft das Dach eines Kirchturms. Die Eckpunkte der dreieckigen Giebelflächen (grau markiert) und der viereckigen Dachflächen werden durch die Punkte A, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, D, $E(4|0|6)$, $F(8|4|6)$, $G(4|8|6)$, H und $S(4|4|12)$ dargestellt. Die vier Dachflächen haben die gleiche Form und die gleiche Größe. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Realität. Die Materialstärken der Bauteile des Dachs sollen im Folgenden vernachlässigt werden.



a Die Ebene L enthält die Punkte C, G und F. Geben Sie eine Gleichung von L in Parameterform an und zeigen Sie, dass auch S in L liegt. — 3

b Weisen Sie nach, dass das Viereck CGSF eine Raute ist. — 2

c Gegeben sind drei Ebenen mit den folgenden Gleichungen: — 2

$M_1 : x_1 = 8$ $\quad M_2 : x_1 - x_2 = 0$ $\quad M_3 : x_3 = 6$

Eine dieser Ebenen stellt eine Symmetrieebene des Kirchendachs dar. Geben Sie diese Ebene an und beschreiben Sie ihre Lage.

d Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels des Vierecks CGSF im Punkt S sowie den gesamten Flächeninhalt der Dachflächen. — 6

e Die Gerade q_1 verläuft durch S und F, die Gerade q_2 durch S und G. Die beiden Geraden schneiden die x_1x_2-Ebene in den Punkten Q_1 bzw. Q_2. Geben Sie das Verhältnis des Abstands von Q_1 und Q_2 zum Abstand von F und G an. Begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von Q_1 und Q_2 zu berechnen. — 3

f Zur Stabilisierung wird zwischen den durch E und G dargestellten Giebelspitzen ein gerader Stahlträger montiert. Vom Mittelpunkt dieses Stahlträgers aus soll eine möglichst kurze Stütze zum durch $\overline{SF}$ dargestellten Balken verlaufen. Der Punkt, in dem die Stütze auf den Balken trifft, wird im Modell mit R bezeichnet. Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten von R ermitteln könnte. — 4

20

Erwartungshorizont

		BE
a	$L : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	3

	$\begin{pmatrix}4\\4\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$	
b	$\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}0\\-4\\6\end{pmatrix}=\overrightarrow{GS}$, $\lvert\overrightarrow{CG}\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}\right\rvert=\lvert\overrightarrow{CF}\rvert$	2
c	M_2 stellt eine Symmetrieebene dar. M_2 verläuft durch die Punkte A, C und S.	2
d	$\cos\varphi=\dfrac{\begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\4\\-6\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\4\\-6\end{pmatrix}\right\rvert}=\frac{36}{52}$ liefert $\varphi\approx 46°$. $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\lvert\overrightarrow{FG}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CS}\rvert=2\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-4\\-4\\12\end{pmatrix}\right\rvert=2\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{176}\approx 150$, d. h. der Flächeninhalt beträgt etwa $150\,m^2$.	6
e	Die Dreiecke SQ_1Q_2 und SFG haben bei S einen gemeinsamen Innenwinkel, die Gerade Q_1Q_2 ist parallel zur Gerade FG. Damit sind die beiden Dreiecke ähnlich. $\overline{SQ_1}$ ist doppelt so lang wie $\overline{SF}$. Folglich ist der Abstand von Q_1 und Q_2 doppelt so groß wie der Abstand von F und G.	3
f	Man bestimmt den Mittelpunkt N von $\overline{EG}$. Mit $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}+\sigma\cdot\overrightarrow{SF}$ liefert $\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{ON}\right)\circ\overrightarrow{SF}=0$ den Wert von σ und damit die Koordinaten von R.	4
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: b) 3.3.2 (10), 3.3.3 (8)
d) 3.3.2 (10) zweiter Teil
e) 3.3.3 (5)

Nicht Standardstufe 10: a), c), d) erster Teil, f)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3					I	I	X		
b	2	I				I		X		
c	2	I			I		I	X		
d	6			I		II			X	
e	3	II	II		I		II		X	
f	4		III	II	I		II			X

2022 – CAS 1

BE

Betrachtet wird der Stumpf ABCDEFGH der schiefen Pyramide ABCDS. Die Grundfläche ABCD mit $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$ und $D(0|0|0)$ sowie die Deckfläche des Stumpfs mit $E(3|0|4)$, $F(3|3|4)$, $G(0|3|4)$ und $H(0|0|4)$ sind quadratisch.

a Zeichnen Sie den Stumpf in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein. 3

b Erläutern Sie das folgende Vorgehen zur Bestimmung der x_3-Koordinate der Pyramidenspitze S: 3

$$\textit{Aus} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \textit{ ergibt sich } s = 16.$$

c Bestimmen Sie das Volumen des Stumpfs. 3

Der Mittelpunkt M der Kante $\overline{AB}$ und der Mittelpunkt N der Kante $\overline{CG}$ liegen auf der Gerade $j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

d Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von j mit der x_1x_3-Ebene. 3

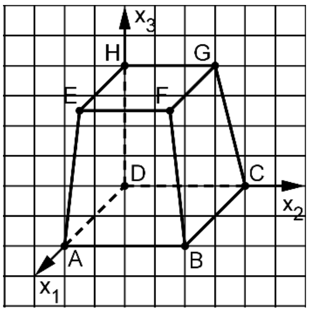
Die Punkte der Kante $\overline{BC}$ lassen sich in der Form $P_w(w|4|0)$ darstellen.

e Für einen Punkt P_w der Kante $\overline{BC}$ schneidet die Gerade durch H und P_w die Gerade j. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von w. 3

f Es gibt Punkte P_w der Kante $\overline{BC}$, für die der von den Strecken $\overline{P_wM}$ und $\overline{P_wH}$ eingeschlossene Winkel größer als 70° ist. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von w. 5

20

Erwartungshorizont

		BE
a		3

b	Die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ verläuft durch A und E. Da D und H auf der x_3-Achse liegen, gilt dies auch für S. Damit ist der Wert von s die x_3-Koordinate von S.	3
c	$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 12 = \frac{148}{3}$	3
d	Mit $x_2 = 0$ liefert $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\mu = -\frac{2}{3}$ und damit $x_1 = \frac{28}{3}$ und $x_3 = -\frac{8}{3}$.	3
e	Gerade durch H und P_w: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} w \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} w \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ liefert $w = \frac{12}{5}$.	3
f	Mit $\overrightarrow{P_wM} = \begin{pmatrix} 4-w \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{P_wH} = \begin{pmatrix} -w \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ liefert $\cos(70°) = \frac{\overrightarrow{P_wM} \circ \overrightarrow{P_wH}}{\left\lvert\overrightarrow{P_wM}\right\rvert \cdot \left\lvert\overrightarrow{P_wH}\right\rvert}$ die Werte $w_1 \approx -0{,}26$ und $w_2 \approx 2{,}96$. P_w liegt genau dann auf $\overline{BC}$, wenn $0 \le w \le 4$ gilt. Da die Größe des von den Strecken $\overline{P_wM}$ und $\overline{P_wH}$ eingeschlossenen Winkels für $w \to +\infty$ beliebig klein wird, ist der Winkel für $w \in [0; w_2[$ größer als 70°.	5
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: a) 3.3.3 (9)
b) 3.3.3 (12)
c) 3.3.2 (7), (8)
e) 3.3.3 (12), (13)

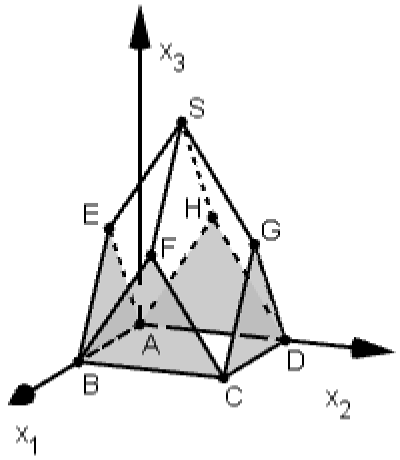
Nicht Standardstufe 10: d), f)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3				I			X		
b	3	II			II		II		X	
c	3		I			I		X		
d	3		I		I	II			X	
e	3		II			I			X	
f	5	III	II			II	II			X

2022 – CAS 2

	BE

Die Abbildung zeigt modellhaft das Dach eines Kirchturms. Die Eckpunkte der dreieckigen Giebelflächen (grau markiert) und der viereckigen Dachflächen werden durch die Punkte A, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, D, $E(4|0|6)$, $F(8|4|6)$, $G(4|8|6)$, H und $S(4|4|12)$ dargestellt. Die vier Dachflächen haben die gleiche Form und die gleiche Größe. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Realität. Die Materialstärken der Bauteile des Dachs sollen im Folgenden vernachlässigt werden.



a Die Ebene L enthält die Punkte C, G und F. Geben Sie eine Gleichung von L in Parameterform an und zeigen Sie, dass auch S in L liegt. — 3

b Weisen Sie nach, dass das Viereck CGSF eine Raute ist. — 2

c Gegeben sind drei Ebenen mit den folgenden Gleichungen: — 2

$M_1: x_1 = 8$ $M_2: x_1 - x_2 = 0$ $M_3: x_3 = 6$

Eine dieser Ebenen stellt eine Symmetrieebene des Kirchendachs dar. Geben Sie diese Ebene an und beschreiben Sie ihre Lage.

d Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels des Vierecks CGSF im Punkt S sowie den gesamten Flächeninhalt der Dachflächen. — 5

e Die Gerade q_1 verläuft durch S und F, die Gerade q_2 durch S und G. Die beiden Geraden schneiden die x_1x_2-Ebene in den Punkten Q_1 bzw. Q_2. Geben Sie das Verhältnis des Abstands von Q_1 und Q_2 zum Abstand von F und G an. Begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von Q_1 und Q_2 zu berechnen. — 3

f Zur Stabilisierung wird zwischen den durch E und G dargestellten Giebelspitzen ein gerader Stahlträger montiert. Vom Mittelpunkt dieses Stahlträgers aus soll eine möglichst kurze Stütze zum durch $\overline{SF}$ dargestellten Balken verlaufen. Der Punkt, in dem die Stütze auf den Balken trifft, wird im Modell mit R bezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten von R. — 5

20

Erwartungshorizont

		BE
a	$L: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + \lambda \cdot \overrightarrow{CF} + \mu \cdot \overrightarrow{CG}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \lambda \cdot \overrightarrow{CF} + \mu \cdot \overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 1$	3
b	$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{GS}$, $\left|\overrightarrow{CF}\right| = \left|\overrightarrow{CG}\right|$	2
c	M_2 stellt eine Symmetrieebene dar. M_2 verläuft durch die Punkte A, C und S.	2

d	$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{SF}\circ\overrightarrow{SG}}{\lvert\overrightarrow{SF}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{SG}\rvert}$ liefert $\varphi \approx 46°$. $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\lvert\overrightarrow{FG}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CS}\rvert \approx 150$, d. h. der Flächeninhalt beträgt etwa $150\,m^2$.	5
e	Die Dreiecke SQ_1Q_2 und SFG haben bei S einen gemeinsamen Innenwinkel, die Gerade Q_1Q_2 ist parallel zur Gerade FG. Damit sind die beiden Dreiecke ähnlich. $\overline{SQ_1}$ ist doppelt so lang wie $\overline{SF}$. Folglich ist der Abstand von Q_1 und Q_2 doppelt so groß wie der Abstand von F und G.	3
f	Mittelpunkt von $\overline{EG}$: $N(4\,\vert\,4\,\vert\,6)$ Mit $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + \sigma\cdot\overrightarrow{SF}$ ergibt sich: $\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{ON}\right)\circ\overrightarrow{SF} = 0 \Leftrightarrow \sigma = \frac{9}{13}$, d. h. $R\left(\frac{88}{13}\,\vert\,4\,\vert\,\frac{102}{13}\right)$.	5
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: b) 3.3.2 (10), 3.3.3 (8)
d) 3.3.2 (10) zweiter Teil
e) 3.3.3 (5)

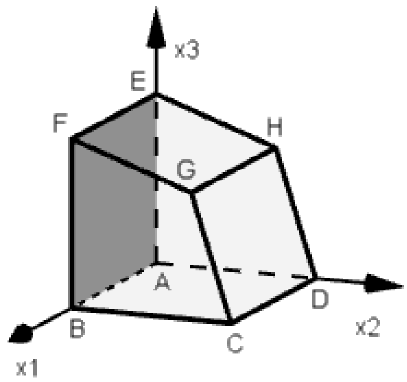
Nicht Standardstufe 10: a), c), d) erster Teil, f)

Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	3					I	I	X		
b	2	I				I		X		
c	2	I			I		I	X		
d	5			I		II			X	
e	3	II	II		I		II		X	
f	5		III	II	I	II	II			X

2023 – WTR 1

BE

Ein Anbau eines Gebäudes wird modellhaft durch das abgebildete Prisma mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(5|0|0)$, $C(5|4|0)$, $D(0|4|0)$, $E(0|0|4)$, $F(5|0|4)$, $G(5|3|3)$ und $H(0|3|3)$ beschrieben. Das Viereck EFGH stellt das Glasdach dar, das Viereck ABFE eine geschlossene Wand; die anderen Seiten des Anbaus bestehen vollständig aus Glas.



Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Die x_1x_2-Ebene beschreibt den Untergrund, auf dem der Anbau steht.

a Begründen Sie, dass das Viereck BCGF ein Drachenviereck ist. 3

b Die Ebene L, in der die Punkte A, B und G liegen, kann durch eine Gleichung der Form $r \cdot x_2 + s \cdot x_3 = 0$ dargestellt werden. Bestimmen Sie passende Werte für r und s. 2

c Begründen Sie, dass die Ebene L eine Symmetrieebene des Körpers ABCDEFGH ist. 3

d Die beiden folgenden Rechnungen I und II liefern das Volumen des Anbaus: 2

I $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ II $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

Erläutern Sie für eine der beiden Rechnungen den zugrunde liegenden Gedankengang.

Auf dem Glasdach kann ein Rollo herabgelassen werden. Dabei bewegt sich das Rollo innerhalb einer Minute von der oberen Kante des Dachs, die durch $\overline{EF}$ dargestellt wird, bis zur unteren Kante des Dachs.

e Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit, mit der das Rollo herabgelassen wird, in Zentimeter pro Sekunde. 2

Zu einem bestimmten Zeitpunkt kann das auf den Anbau treffende Sonnenlicht durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

f Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem das Sonnenlicht auf den Untergrund trifft. 3

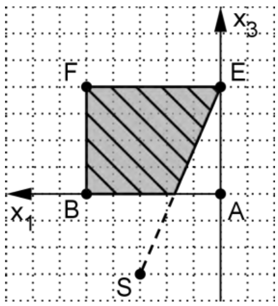
g Die geschlossene Wand sowie der Schatten, den das vollständig herabgelassene Rollo auf dieser Wand erzeugt, sollen – in Form einer gesonderten zweidimensionalen Zeichnung – in der x_1x_3-Ebene grafisch dargestellt werden. Die folgende Rechnung stellt einen wesentlichen Schritt zur Lösung dieser Aufgabe dar: 5

$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *liefert* $\mu = 3$ *und damit* $(3|0|-3)$.

Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Lösungsschritts und fertigen Sie die angestrebte Zeichnung an.

20

Erwartungshorizont

		BE
a	$\lvert\overline{BC}\rvert = 4 = \lvert\overline{BF}\rvert$, $\lvert\overline{GC}\rvert = \sqrt{1^2+3^2} = \lvert\overline{GF}\rvert$	3
b	Da G in der Ebene liegt, gilt $3r+3s=0$. Damit ergibt sich beispielsweise $r=1$ und $s=-1$.	2
c	Das Prisma ABCDEFGH mit dem Drachenviereck BCGF als Grundfläche ist gerade. L enthält die Symmetrieachse der Grundfläche und steht zu dieser senkrecht.	3
d	I: Das Prisma ABCDEFGH hat die Höhe 5. Der Inhalt der Grundfläche BCGF ist doppelt so groß wie der Inhalt $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3$ des Dreiecks BCG.	2
e	$\frac{\lvert\overline{FG}\rvert\cdot 100\,\text{cm}}{60\,\text{s}} \approx 5{,}3\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	2
f	$\sin\varphi = \frac{\left\lvert\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert}$ liefert $\varphi\approx 55°$.	3
g	$(3\,\vert\,0\,\vert\,-3)$ ist der Schnittpunkt S der Gerade durch H mit dem gegebenen Richtungsvektor und der x_1x_3-Ebene. 	5
		20

Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (10)
d) 3.3.2 (7)
e) 3.3.2(10), 3.3.3 (14)

Nicht Standardstufe 10: b), c), f), g)

Teilaufgabe	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Anforderungsbereich I	II	III
a	3					I		X		
b	2		II		I	I			X	
c	3	II			I		I		X	
d	2	I			I		I	X		
e	2		I	I		I	I	X		

f	3					II			X	
g	5	II	III	II	II	II	I			X

2023 – WTR 2

BE

Die Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEF mit $A(10|0|0)$, $B(0|7{,}5|0)$, $C(0|-7{,}5|0)$, $D(8|0|1)$, $E(0|3|3)$ und $F(0|-3|3)$. Das Dreieck ABC wird als Grundfläche und das Dreieck DEF als Deckfläche des Körpers bezeichnet. Die Deckfläche liegt in der Ebene L.

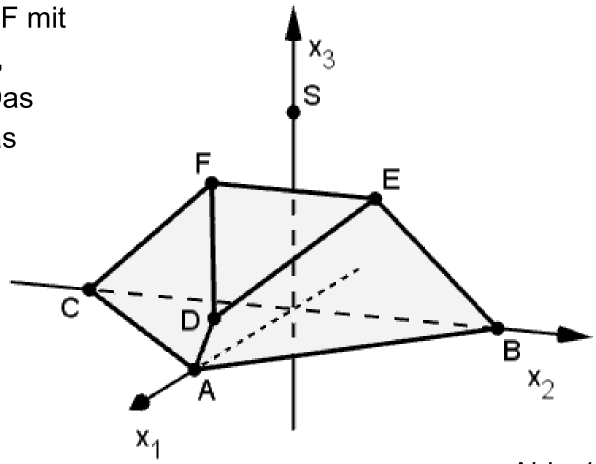


Abb. 1

a Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Begründen Sie, dass die Kante $\overline{EF}$ parallel zur Grundfläche liegt. 3

b Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $x_1 + 4x_3 = 12$)

c Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die x_3-Achse die Ebene L schneidet. 3

Der Körper ABCDEF kann zu einer Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S (siehe Abbildung 1) ergänzt werden, wobei D, E und F auf Kanten der Pyramide liegen.

d Berechnen Sie die Koordinaten von S. 3

(zur Kontrolle: $S(0|0|5)$))

e S ist auch Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche DEF. Die Abbildung 2 zeigt in der x_1x_3-Ebene die Punkte D und S sowie den Mittelpunkt M der Kante $\overline{EF}$. Begründen Sie, dass der Abstand von S zur Ebene L kleiner als 2 ist, und veranschaulichen Sie Ihre Begründung durch geeignete Eintragungen in der Abbildung 2. 3

Abb. 2

f Alle Punkte der Strecke $\overline{DS}$ lassen sich in der Form $D_t(8-8t|0|1+4t)$ mit $t \in [0;1]$ darstellen. 4

Die Abbildung 3 zeigt die Graphen I und II. Einer dieser Graphen stellt das Volumen des Körpers $ABCD_tEF$ in Abhängigkeit von t dar. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe.

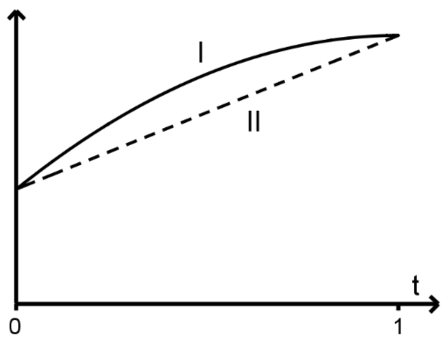
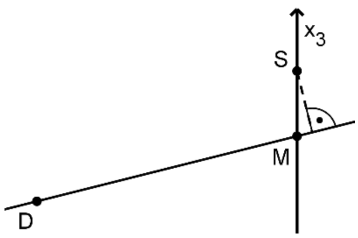


Abb. 3

20

Erwartungshorizont

		BE
a	Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$, d. h. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$. Die Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene, E und F haben die gleiche x_3-Koordinate.	3
b	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem: I $x_1 = 8r$ II $x_2 = -3 + 3r + 6s$ III $x_3 = 3 - 2r$ Aus III ergibt sich $4x_3 = 12 - 8r$. Mit I folgt $x_1 + 4x_3 = 12$.	4
c	$\sin\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{4}{\sqrt{1^2+4^2}}$ liefert $\varphi \approx 76°$.	3
d	S liegt auf der x_3-Achse. $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ liefert $t = 5$ und damit $x_3 = 5$ als x_3-Koordinate von S.	3
e	Der Abstand von S zu L ist kleiner als der Abstand von S zu M und der Abstand von S zu M ist 2.  	3

f	Graph II Begründung: Das Volumen des Körpers $ABCD_tEF$ erhält man, indem man vom konstanten Volumen der Pyramide ABCS das Volumen der Pyramide $EFSD_t$ subtrahiert. Letzteres kann mit dem Term $\frac{1}{3} \cdot A_{EFS} \cdot (8-8t)$ berechnet werden, wobei A_{EFS} der konstante Flächeninhalt des Dreiecks EFS ist. Damit nimmt das Volumen des Körpers $ABCD_tEF$ mit wachsenden Werten von t linear zu.	4
		20

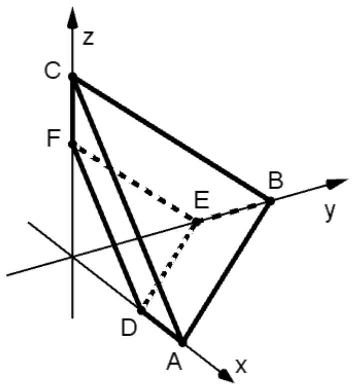
Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (10), 3.3.3 (8)
d) 3.3.3 (12), 3.3.3 (13)
f) 3.3.2 (8)

Nicht Standardstufe 10: b), c), e)

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I			I	I	I	X		
b	4					II			X	
c	3					II			X	
d	3		I		I	I	I	X		
e	3	II	II		II		I		X	
f	4	III	III		II	II	II			X

2023 – MMS 2

		BE
	Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF. Die Eckpunkte $A(4\|0\|0)$, $B(0\|4\|0)$ und $C(0\|0\|4)$ liegen in der Ebene $L_1: x+y+z=4$, die Eckpunkte D, E und F jeweils auf einer Koordinatenachse und in der Ebene $L_2: 2x+2y+2z=5$. 	
a	Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC gleichseitig ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts G auf der Seite $\overline{AC}$, für den $\|\overline{AG}\|:\|\overline{GC}\|=1:3$ gilt.	4
b	Begründen Sie, dass L_1 und L_2 keine gemeinsamen Punkte haben.	2
c	Entscheiden Sie, ob der Abstand von B und E kleiner als der Abstand von L_1 und L_2, größer als der Abstand von L_1 und L_2 oder genauso groß wie der Abstand von L_1 und L_2 ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.	3
d	Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L_2 mit der xy-Ebene einschließt.	3
e	Ausgehend vom Ansatz $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot k^2\cdot k$ kann für einen Wert von $k\in\mathbb{R}$ das Volumen des Körpers ABCDEF berechnet werden. Erläutern Sie diesen Ansatz und bestimmen Sie den passenden Wert von k.	4
f	Der Körper ABCDEF wird so um seine Kante $\overline{AB}$ gedreht, dass der mit C bezeichnete Eckpunkt des Körpers nach der Drehung in der xy-Ebene liegt und dabei eine positive x-Koordinate hat. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Eckpunkts nach der Drehung.	4
		20

Erwartungshorizont

		BE
a	Wegen $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|=\|\overrightarrow{CA}\|$ ist das Dreieck ABC gleichseitig. $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$	4
b	$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist Normalenvektor beider Ebenen. Die Abbildung zeigt, dass L_1 und L_2 nicht übereinstimmen.	2

c	B und E liegen in L_1 bzw. L_2; $\vec{n}$ und der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ der Gerade durch B und E sind nicht kollinear. Damit ist der Abstand der Punkte größer als der Abstand der Ebenen.	3
d	$\cos\varphi = \frac{\vec{n}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\lvert\vec{n}\rvert}$ liefert $\varphi \approx 55°$.	3
e	Der erste Summand gibt das Volumen der Pyramide OABC an, der zweite das Volumen der Pyramide ODEF. Der Wert von k stimmt mit der x-Koordinate des Schnittpunkts von L_2 mit der x-Achse überein. $2k = 5$ liefert $k = 2{,}5$.	4
f	Mit dem Mittelpunkt $M(2\|2\|0)$ von $\overline{AB}$ ergibt sich für den Ortsvektor des Eckpunkts nach der Drehung $\overrightarrow{OM} + \frac{\lvert\overline{MC}\rvert}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2\sqrt{3}\\2+2\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$.	4
		20

<u>Bildungsplan BW– & KMK–Standardbezug</u>

Standardstufe 10: a) 3.3.2 (9), 3.3.3 (12)

Nicht Standardstufe 10: b), c), d), e), f)

Teilaufgabe	**BE**	**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungsbereich**		
		K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	4		I			I		X		
b	2	I			I		I	X		
c	3	II			I		I		X	
d	3					II			X	
e	4	I	I		II	I	I		X	
f	4		III		II	II	II			X