Baden-Württemberg

Basisfach Mathematik

Mündliche Abiturprüfung

ab 2023

Allgemeine Informationen

Aufgabenbeispiele

Aus dem Bildungsplan 2016

„Im **Basisfach** erwerben und erweitern die Schülerinnen und Schüler Kompetenzen, die ihnen das Erkennen und Erläutern mathematischer Zusammenhänge und verständiges mathematisches Handeln ermöglichen. Die Inhalte werden dazu im Unterricht stärker vorstrukturiert und Argumentationen erfolgen häufig anschaulich oder durch heuristische Betrachtungen. Der Unterricht im Basisfach fördert durch verstärktes realitätsbezogenes Vorgehen die Einsicht, dass Mathematik auch ein geeignetes Mittel zur Bearbeitung von Fragestellungen außerhalb der Mathematik ist.“

Inhalt

Struktur der Prüfung	Jede mündliche Prüfung besteht aus zwei Prüfungsteilen (ca. 10 Minuten Vortrag und ca. 10 Minuten Prüfungsgespräch) und erstreckt sich auf zwei Sachgebiete: • Analysis **und** • entweder Analytische Geometrie oder Stochastik Das Sachgebiet Analysis kann dabei entweder im ersten oder im zweiten Prüfungsteil Gegenstand der Prüfung sein.
Struktur einer Aufgabe	Für jede Prüfung ist eine Aufgabe schriftlich auszuarbeiten, die aus der Kombination zweier Teile besteht: Die Aufgabe für den ersten Prüfungsteil (den Vortrag), enthält vollständig ausformulierte, mit Operatoren versehene Teilaufgaben. Nur diese Aufgabe wird dem Prüfling für die Vorbereitung schriftlich vorgelegt. Die Aufgabe für den zweiten Prüfungsteil (das Prüfungsgespräch) besteht aus • einem kurzen schriftlichen Input (den der Prüfling erst zu Beginn des zweiten Teils der Prüfung erhält) sowie • einer ausreichenden Anzahl denkbarer Aspekte für das Prüfungsgespräch, die alle Anforderungsbereiche (die jeweils auszuweisen sind) abdecken. Nur die dem Prüfling schriftlich vorgelegte Aufgabe für den ersten Prüfungsteil ist „Prüfungsaufgabe“ im Sinne der AGVO.
Anforderungen	Die Aufgabe für den ersten Prüfungsteil „muss einen einfachen Einstieg erlauben und muss so angelegt sein, dass unter Beachtung der Anforderungsbereiche, die auf der Grundlage eines Erwartungshorizontes zugeordnet werden, grundsätzlich jede Note erreichbar ist.“ (KMK-Standards) Es gibt also keine „leichten“ Aufgaben (bei denen man nicht zwischen „guten“ und „sehr guten“ Leistungen differenzieren kann) und keine „schwierigen“ Aufgaben (bei denen man nicht zwischen „ausreichend“, „mangelhaft“ und „ungenügend“ differenzieren kann). Jede Aufgabe enthält somit Teilaufgaben aus jedem Anforderungsbereich (I, II, III).
Inhalte	Die Aufgaben erwachsen aus dem Unterricht der Kursstufe. Sie stellen hinsichtlich der inhaltsbezogenen Kompetenzen eine angemessene Verbindung von Breite und Tiefe her: Sie decken einerseits ein breites Spektrum inhaltlicher Kompetenzen ab (ohne zu flach und unzusammenhängend-vielfältig zu sein) und setzen andererseits auch einen vertiefenden Schwerpunkt (ohne zu eng und zu spezialisiert zu werden).
Kompetenzen	„Die Prüfungsaufgabe ist so zu gestalten, dass mehrere Leitideen und allgemeine mathematische Kompetenzen berücksichtigt werden, sodass mathematisches Arbeiten in der gymnasialen Oberstufe hinreichend erfasst wird. Die Aufgabenstellung für die mündliche Prüfung unterscheidet sich von der für die schriftliche Prüfung. Umfangreiche Rechnungen und zeitaufwändige Konstruktionen sind zu vermeiden. Vielmehr sollen die Prüflinge mathematische Sachverhalte im freien Vortrag darstellen und im Gespräch zu mathematischen Fragen Stellung nehmen. Besonders geeignet sind Aufgabenstellungen, die sich auf die Erläuterung eines Lösungswegs beziehen, ohne dass die zugehörigen Rechnungen im Einzelnen auszuführen sind, und solche, bei denen Ergebnisse, Skizzen, Lösungswege usw. vorgegeben werden, an denen wesentliche Gedankengänge zu erläutern sind. Aufgaben, die sich in Teilaufgaben zunehmend öffnen, bieten dem Prüfling eine besondere Chance, den Umfang seiner Fähigkeiten und die Tiefe seines mathematischen Verständnisses darzustellen.“ (KMK-Standards) An der Verwendung vielfältiger Operatoren wird sichtbar, dass ein breites Spektrum prozessbezogener Kompetenzen eingefordert wird.

Umfang	Der Umfang der Aufgabe für den ersten Prüfungsteil ist so zu bemessen, dass eine vollständige Bearbeitung (einschließlich der Vorbereitung eines Vortrags) innerhalb der 20 Minuten Vorbereitungszeit grundsätzlich möglich ist.
Hilfsmittel	Die Angabe, ob und ggf. welche mathematischen Hilfsmittel (WTR, Merkhilfe) in der Vorbereitungszeit zur Verfügung stehen sollen, ist Teil der Aufgabenstellung. Möglich sind sowohl Aufgaben mit Hilfsmitteln als auch Aufgaben ohne Hilfsmittel. Während der Prüfung selbst sind keine Hilfsmittel zugelassen. In der Prüfung soll dem Prüfling die Möglichkeit zur Verfügung stehen, Aufzeichnungen aus der Vorbereitung zu visualisieren; zeitraubendes Aufschreiben vorbereiteter Teile ist zu vermeiden.
Erwartungs-horizont	Zur Aufgabe für den ersten Prüfungsteil ist ein Erwartungshorizont zu erstellen. In ihm ist für jede Teilaufgabe der jeweilige Anforderungsbereich auszuweisen; Verrechnungspunkte sind dabei nicht anzugeben. Es wird dringend empfohlen, diesen Erwartungshorizont schriftlich vorzulegen. Zur Aufgabe für den zweiten Prüfungsteil wird die Erstellung eines schriftlichen Erwartungshorizonts nicht erwartet.
Bewertungs-grundsätze	„Eine Bewertung mit „gut“ (11 Punkte) setzt voraus, dass [...] Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen erbracht worden sein müssen. Eine Bewertung mit „ausreichend“ (05 Punkte) setzt voraus, dass über den Anforderungsbereich I hinaus auch Leistungen in einem weiteren Anforderungsbereich erbracht worden sind.“ (KMK-Standards)
Bewertungs-kriterien	„Bei der Bewertung sollen vor allem folgende Kriterien berücksichtigt werden: • Umfang und Qualität der nachgewiesenen mathematischen Kompetenzen, • sachgerechte Gliederung und folgerichtiger Aufbau der Darstellung, Beherrschung der Fachsprache, Verständlichkeit der Darlegungen, adäquater Einsatz der Präsentationsmittel und die Fähigkeit, das Wesentliche herauszustellen, • Verständnis für mathematische Probleme sowie die Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen und darzustellen, mathematische Sachverhalte zu beurteilen, auf Fragen und Einwände einzugehen und gegebene Hilfen aufzugreifen, • Kreativität, Reflexionsfähigkeit und Selbstständigkeit im Prüfungsverlauf.“ (KMK-Standards)
Anzahl und Art der Aufgaben-vorschläge	Jede Aufgabe kann bei bis zu drei unmittelbar aufeinander folgenden Prüfungen (und zugleich in allen gleichzeitig stattfindenden Prüfungen paralleler Kurse) verwendet werden. Damit für das leitende Mitglied des Fachausschusses eine echte Auswahl besteht, muss die Kurslehrkraft zumindest zwei Aufgaben mehr vorlegen, als für den Kurs mindestens benötigt werden. Dabei müssen unter den insgesamt vorgelegten Aufgaben, insbesondere auch unter den zur Vorbereitung vorgesehenen ersten Aufgabenteilen, alle drei Sachgebiete in hinreichender Anzahl vertreten sein. Die Kurslehrkraft legt die Aufgaben spätestens eine Woche vor den Prüfungen schriftlich vor.

Aufgabe 1

Teil 1: Analysis

Die Abbildungen zeigen die Graphen einer ganzrationalen Funktion f, einer trigonometrischen Funktion g und einer Exponentialfunktion h.

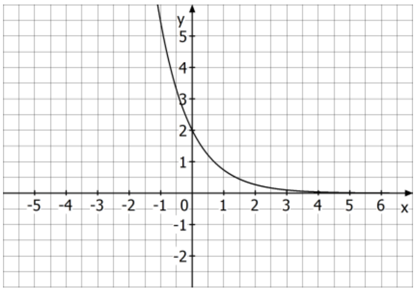


Abbildung I

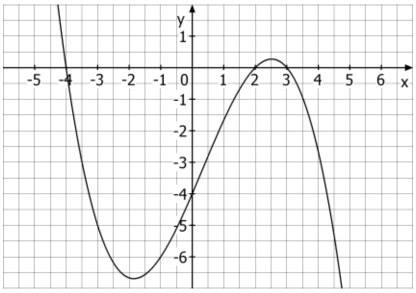


Abbildung II

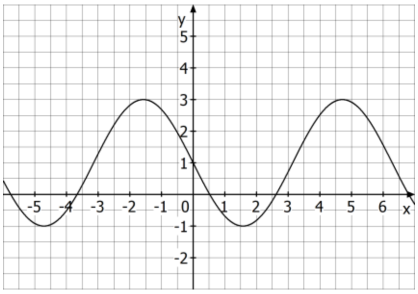


Abbildung III

a) Ordnen Sie die Funktionen f, g und h den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Geben Sie für einen der abgebildeten Graphen einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.

c) Der Graph der Funktion in Abbildung II schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man den Inhalt dieser Fläche berechnen kann, und geben Sie einen entsprechenden Rechenausdruck an.

d) Gegeben ist die Funktion i mit $i(x) = -e^{-x}$.

Berechnen Sie a so, dass $\int_a^0 i(x)\,dx = -2$ gilt.

Bestimmen Sie eine nichtkonstante ganzrationale Funktion j und Werte für b und c, so dass gilt $\int_b^c j(x)\,dx = -8$.

Aufgabe 1

Teil 1: Analysis – Erwartungshorizont

a) Zuordnung (AB I)
f: Abb. II; g: Abb. III; h: Abb. I;
Begründung anhand typischer Funktionseigenschaften

b) Funktionsterm (AB II)
$f(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+4)$ (Graph von k mit $k(x) = (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+4)$ an der x-Achse gespiegelt und gestreckt, da $k(0) = 24$ ist, beträgt der Streckfaktor $\frac{1}{6}$)
$g(x) = -2 \cdot \sin(x) + 1$ (Graph von l mit $l(x) = \sin(x)$ an der x-Achse gespiegelt, mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und um 1 in y-Richtung verschoben)
$h(x) = 2 \cdot e^{-x}$ (Graph von m mit $m(x) = e^x$ an der y-Achse gespiegelt und mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt)

c) Verfahren (AB II)
1. Schritt: Bestimmung der Nullstellen
2. Schritt: Berechnung der Inhalte der beiden Teilflächen mithilfe von Integralen
3. Schritt: Addition der beiden Flächeninhalte

$$A = -\int_{-4}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$$

d) Integral (AB II)
$\int_a^0 i(x)\,dx = \left[e^{-x}\right]_a^0 = 1 - e^{-a}$, der Ansatz $1 - e^{-a} = -2$ führt auf $a = -\ln(3)$.

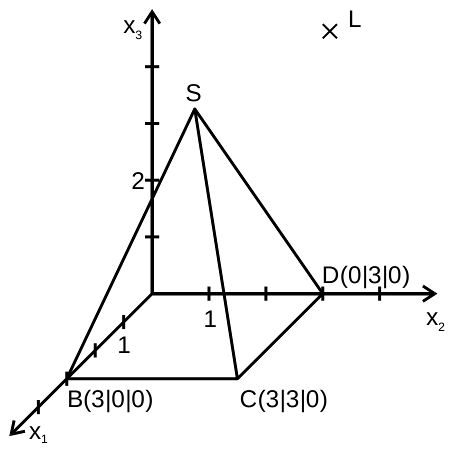
Funktion und Werte (AB III)
Z. B. $j(x) = -x$ und $b = 0$ und $c = 4$.

Aufgabe 1

Teil 2: Geometrie

Input

Eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die Höhe 4. Im Punkt L befindet sich eine punktförmige Lichtquelle.



Aspekte im AB I:

- Angeben der Koordinaten von S
- Bestimmen des Pyramidenvolumens
- Ermitteln der Koordinatengleichung einer Seitenfläche

Aspekte im AB II:

- Nachweisen der Gleichschenkligkeit eines Seitendreiecks
- Beschreiben eines Verfahrens zur Bestimmung der Pyramidenoberfläche
- Ermitteln der Formel zur Bestimmung des Winkels zwischen Grund- und einer Seitenfläche

Aspekte im AB III:

- Bestimmen mehrerer Ebengleichungen, so dass die Ebenen jeweils die Pyramide in zwei volumengleiche Teile zerlegen
- Überprüfen, ob ein gegebener Punkt im Pyramideninneren liegt
- Untersuchen eines Schattenwurfs

Aufgabe 2

Teil 1: Analysis

Die Geschwindigkeit eines Autos auf einer Teststrecke wird beschrieben durch eine Funktion f mit $f(x) = 24 + 24 \cdot e^{-0{,}08 \cdot x}$; $0 \leq t \leq 60$ (x in Sekunden, f(x) in Meter pro Sekunde).

a) Berechnen Sie $f(0)$ und $f'(0)$ und $\int_0^{60} f(x)\,dx$.

Deuten Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

Das Auto und ein Motorrad befinden sich zum Zeitpunkt $x = 0$ nebeneinander und fahren in den nächsten 60 Sekunden in die gleiche Richtung. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion f und den Graphen der Funktion g, die die Geschwindigkeit des Motorrads beschreibt.

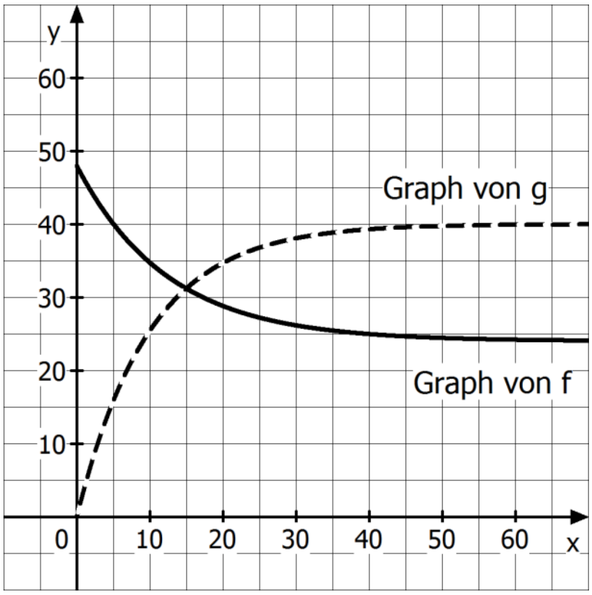


Abb. 1

b) Beschreiben Sie die Bewegungen des Autos und des Motorrads.

c) Abbildung 2 stellt für einen Ausschnitt der Fahrt den Abstand der beiden Fahrzeuge dar. Beschreiben Sie, wie man die x-Koordinate des Punktes H mithilfe von Abbildung 1 ermitteln kann. Entscheiden Sie, ob die y-Koordinate von H größer als 500 ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

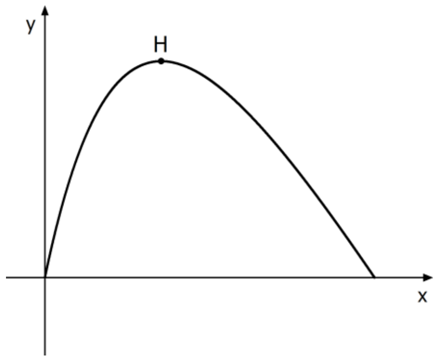


Abb. 2

d) Das Motorrad überholt das Auto zum Zeitpunkt x_0. Bestimmen Sie eine Gleichung, mit der man bei gegebenem Funktionsterm von g den Zeitpunkt x_0 berechnen kann.

Aufgabe 2

Teil 1: Analysis – Erwartungshorizont

a) Berechnung und Deutung (AB I)

$f(0)=48$. Das Auto hat bei Beobachtungsbeginn die Geschwindigkeit 48 Meter pro Sekunde.

$f'(x)=-1{,}92\cdot e^{-0{,}08t}$, also $f'(0)=-1{,}92$. Das Auto hat bei Beobachtungsbeginn eine Beschleunigung von $-1{,}92\,\frac{m}{s^2}$.

$$\int_0^{60} f(x)\,dx=\left[24t-300\cdot e^{-0{,}08\cdot t}\right]_0^{60}\approx 1737{,}53$$

Das Auto legt in den ersten 60 Sekunden ca. 1,7 km zurück.

b) Beschreibung (AB II)

Die Geschwindigkeit des Autos nimmt stets ab, wobei die Abnahme immer geringer wird.
Das Motorrad hat zu Beobachtungsbeginn die Geschwindigkeit 0 Meter pro Sekunde, seine Geschwindigkeit nimmt stets zu, wobei die Zunahme immer geringer wird.

c) Beschreibung (AB II)

Die x-Koordinate von H ist die Schnittstelle der beiden Graphen.

Entscheidung (AB II)

Die y-Koordinate von H entspricht dem Inhalt der Fläche, die von den Graphen von g und h und der y-Achse eingeschlossen wird. Dieser Wert ist offensichtlich kleiner als 500.

d) Bestimmung einer Gleichung (AB III)

Zum Zeitpunkt x_0 haben beide Fahrzeuge die gleiche Strecke zurückgelegt.

x_0 ist Lösung der Gleichung $\int_0^{x_0} f(x)\,dx=\int_0^{x_0} g(x)\,dx$.

Aufgabe 2

Teil 2: Geometrie

Input

Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$
Ebene $F: 2x_1 - x_2 = 6$

Aspekte im AB I:

- Veranschaulichen der Lage der Ebene E mit Hilfe von Spurpunkten
- Punktprobe und Ablesen des Normalenvektors
- Angeben der besonderen Lage von F

Aspekte im AB II:

- Darstellen der Beziehung zwischen der Anzahl der Spurpunkte und besonderer Lage einer Ebene
- Vektorielle Darstellung der Ebene E und Erläutern der geometrischen Bedeutung ihrer Bestandteile
- Ermitteln des Abstands verschiedener Objekte zur Ebene E
- Bestimmen einer Gleichung einer orthogonalen bzw. parallelen Ebene zu E
- Spiegeln einer Geraden an der Ebene E

Aspekte im AB III:

- Erläutern besonderer Ausschnitte der Ebene E in Parameterform, z. B. Parameter aus Intervall [0,1]
- Bestimmen gemeinsamer Punkte der Ebenen E und F

Aufgabe 3

Teil 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$.

a) Abbildung 1 zeigt den Graphen von f.
Erläutern Sie, wie man den Graphen von f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ erhält.

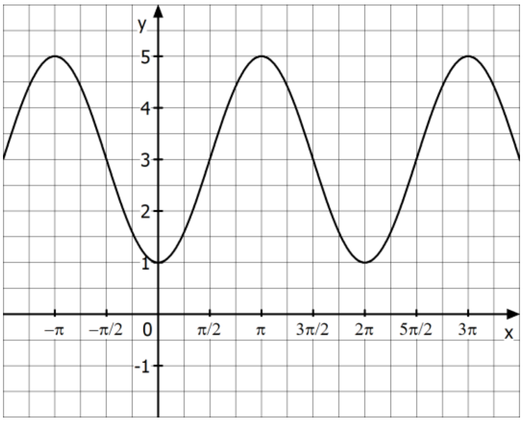


Abbildung 1

b) Eine der Abbildungen 2 und 3 zeigt den Graphen von f'.

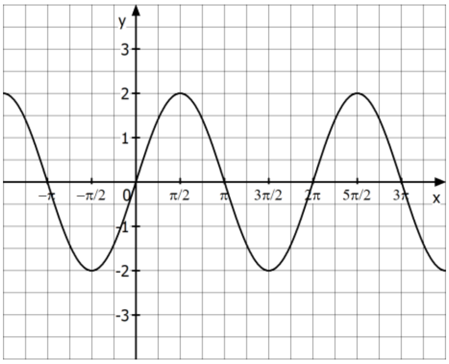


Abbildung 2

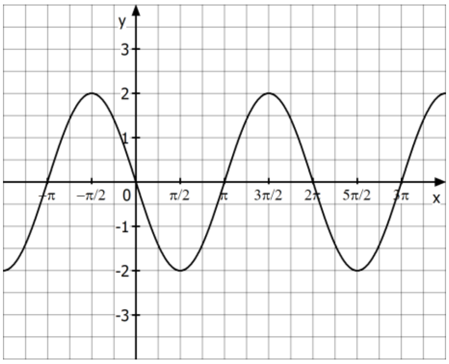


Abbildung 3

Entscheiden Sie, in welcher der Abbildungen der Graph von f' dargestellt ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = 0$ gilt.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{0}^{\pi} (5 - f(x))\,dx$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

d) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Eine trigonometrische Funktion ist durch die Angabe der Koordinaten eines beliebigen Hochpunktes und eines beliebigen Tiefpunktes ihres Graphen eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3

Teil 1: Analysis – Erwartungshorizont

a) Entstehen des Graphen (AB I)

Streckung um 2 in y-Richtung, Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung, Verschiebung um 3 in y-Richtung.

b) Zuordnung und Begründung (AB I)

Der Graph von f' ist in Abbildung 2 dargestellt. Denn der Graph von f weist an der Stelle $x_1 = \frac{\pi}{2}$ eine positive Steigung auf, also ist $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

Integral (AB II)

Die Fläche zwischen dem Graphen von f' und der x-Achse über dem Intervall $[-\pi; 0]$ und die über dem Intervall $[0; \pi]$ sind wegen der Punktsymmetrie des Graphen gleich groß. Da die eine unterhalb und die andere oberhalb der x-Achse liegt, ist $\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = 0$.

c) Integral (AB II)

$$\int_0^{\pi} (5 - f(x))\, dx = \int_0^{\pi} \left(2 - 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) dx = 2 \cdot \left[x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 2\pi$$

Geometrische Interpretation (AB II)

Die Fläche zwischen der Geraden mit der Gleichung $y = 5$ und dem Graphen von f über dem Intervall $[0; \pi]$ hat den Inhalt 2π FE.

d) Aussage (AB III)

Die Aussage ist falsch. Durch die Festlegung eines Hochpunkts und eines Tiefpunkts ist die Periode nicht festgelegt, denn es können beliebig viele weitere Extrempunkte dazwischen liegen.

Aufgabe 3

Teil 2: Geometrie

Input

Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

Gerade h durch $A(2\,|\,5\,|\,-2)$ und $B(6\,|\,2\,|\,-2)$

Aspekte im AB I:

- Ermitteln einer Gleichung der Geraden h
- Geometrische Interpretation aller Bestandteile der Geradengleichung für g
- Durchführen einer Punktprobe
- Angabe weiterer Gleichungen von g

Aspekte im AB II:

- Bestimmen der gegenseitigen Lage von g und h
- Ermitteln der Gleichung einer weiteren Geraden, welche parallel zu Gerade g ist und h schneidet
- Bestimmen von Punkten auf der Geraden g, die vom Punkt $P(1\,|\,-2\,|\,3)$ den Abstand 6 haben

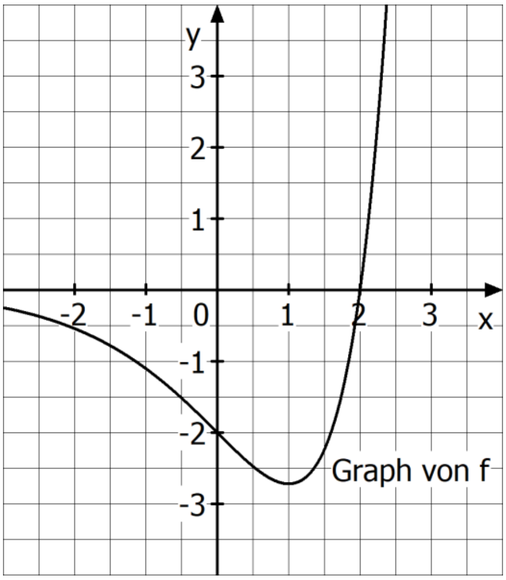
Aspekte im AB III:

- Bestimmen einer Gleichung der Ebene E, die g enthält und parallel zu h liegt
- Ermitteln einer Gleichung der Geraden durch einen gegebenen Punkt, die die Gerade g orthogonal schneidet

Aufgabe 4

Teil 1: Analysis (ohne WTR)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



a) Bestimmen Sie $f'(0)$.

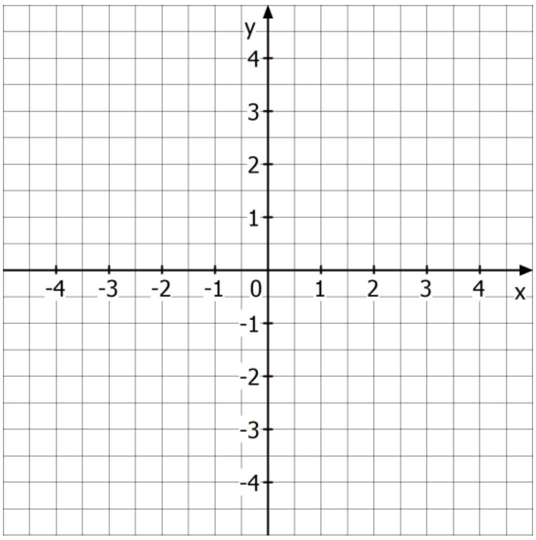
b) Ermitteln Sie $\int_0^2 f(x)\,dx$.

c) F ist eine Stammfunktion von f.
Untersuchen Sie mit Hilfe des Graphen von f, ob der Graph von F im abgebildeten Bereich Hoch-, Tief- bzw. Wendepunkte besitzt. Geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Stellen an.

d) Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionsgleichung zu f gehört:
$f_1(x) = (x-2)\cdot e^{-x}$; $f_2(x) = (x-2)\cdot e^{x}$; $f_3(x) = x\cdot e^{x} - 2$
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Der Graph der Funktion g mit $g(x) = (x-2)^2 \cdot e^{x}$ besitzt den Hochpunkt $H(0\,|\,4)$.
Skizzieren Sie den Graphen von g in das beigefügte Koordinatensystem und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Koordinatensystem:



Aufgabe 4

Teil 1: Analysis – Erwartungshorizont

a) Bestimmung von f'(0) (AB I)

$f'(0) \approx -1$. Skizzieren der Tangente im Punkt $P(0 \mid f(0))$ und Ablesen der Steigung.

b) Integral (AB II)

Kästchenzählen ergibt $A \approx 17$ Kästchen, also ist $\int_0^2 f(x)\,dx \approx -\frac{17}{4} = -4{,}25$

c) Graph von F (AB II)

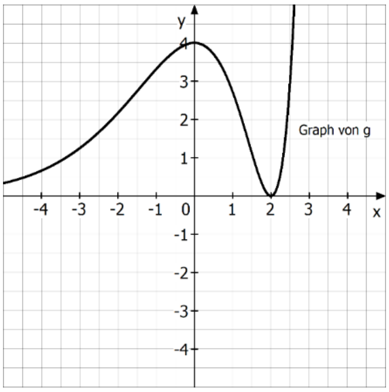
Der Graph von F besitzt an der Stelle $x_1 = 2$ einen Tiefpunkt (Nullstelle von f mit VZW von – nach +) und an der Stelle $x_2 = 1$ einen Wendepunkt (Extremstelle von f).

Er besitzt im abgebildeten Bereich keinen Hochpunkt (keine Nullstelle von f mit VZW von + nach –).

d) Zuordnung und Begründung (AB II)

Die Funktionsgleichung f_2 gehört zu f, denn $f_1(1) = -\frac{1}{e} > -1$ und $f_3(2) = 2 \cdot e^2 - 2 \neq 0$.

e) Graph von g (AB III)



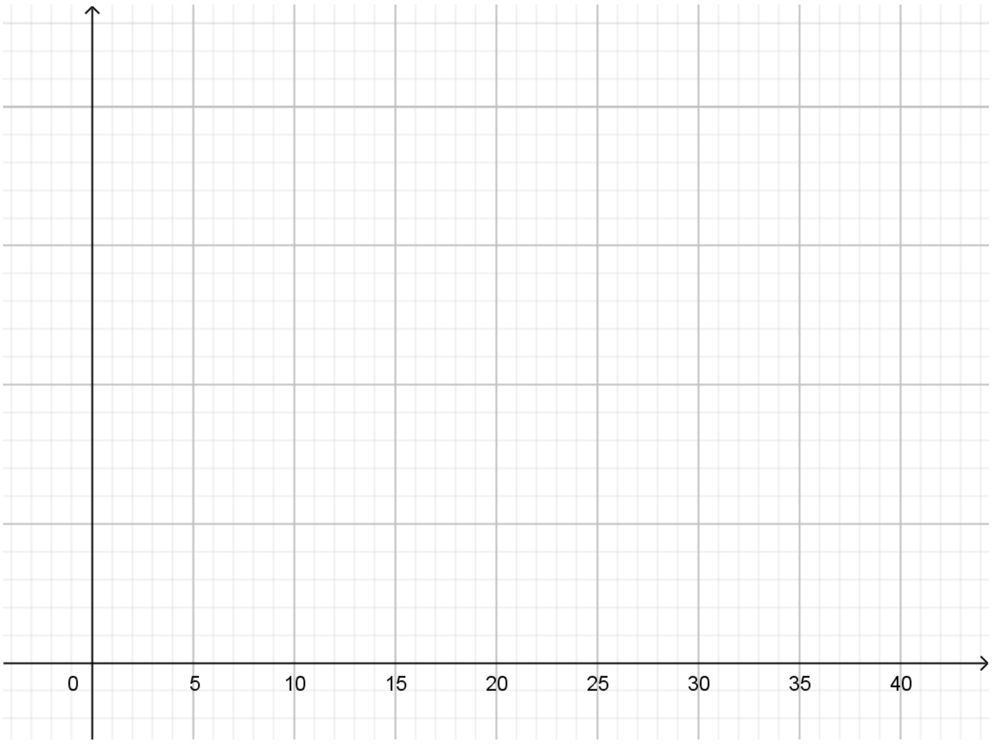
Begründung z. B. anhand der Nullstelle, des Wertebereichs und des Verhaltens für $x \to \pm\infty$.

Aufgabe 4

Teil 2: Stochastik

Input

Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 20$ und $\sigma = 4$.



Aspekte im AB I:

- Skizzieren der Kurve zu dieser Zufallsgröße
- Erläutern, wie $P(X \leq 21)$, $P(X = 21)$ und $P(X > 21)$ bestimmt werden kann
- Angeben eines Sachkontextes zu einer normalverteilten Zufallsvariablen
- Beschreiben, wie sich die Kurve ändert, wenn μ verändert wird

Aspekte im AB II:

- Beschreiben, wie sich die Kurve ändert, wenn σ verändert wird
- Nennen und Erläutern von Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen Binomialverteilung und Normalverteilung

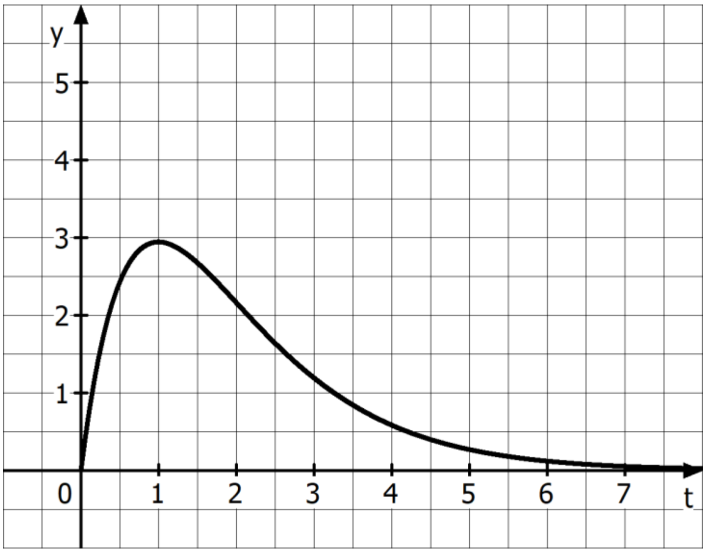
Aspekte im AB III:

- Ermitteln einer diskret verteilten Zufallsgröße, deren Histogramm eine ähnliche Form wie obige Kurve hat

Aufgabe 5

Teil 1: Analysis

Die Funktion f beschreibt für $t \geq 0$ die Wachstumsrate einer Pflanze. Die Zeit t wird dabei in Tagen und die Wachstumsrate f(t) in cm pro Tag angegeben. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f.



a) Bestimmen Sie anhand der Abbildung $f'(2)$ und $\int_0^2 f(t)\,dt$.

b) Bestimmen Sie die ungefähre Höhe der Pflanze nach dem zweiten Tag, wenn die Pflanze zu Beobachtungsbeginn 20 cm hoch war.

c) Die Funktion f hat den Funktionsterm $f(t) = 8t \cdot e^{-t}$.

Für die Ableitung f' von f gilt: $f'(t) = e^{-t} \cdot (8 - 8t)$.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsrate der Pflanze am stärksten abnimmt.

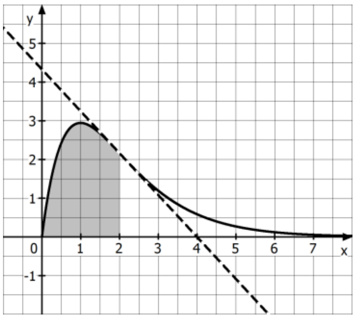
d) F ist eine Stammfunktion von f. Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $F(t+1) = F(t) + 2{,}5$ führt.
Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung eine Lösung dieser Gleichung ermitteln kann.

Aufgabe 5

Teil 1: Analysis – Erwartungshorizont

a) Bestimmung von f'(2) (AB I)

$f'(2) \approx -1$



Bestimmung des Integrals (AB I)

Kästchenzählen ergibt $A \approx$ 19 Kästchen, somit ist

$$\int_0^2 f(t)\,dt \approx \frac{19}{4} = 4{,}75$$

b) Höhe (AB II)

$20 + 4{,}75 = 24{,}75$. Die Pflanze ist nach dem zweiten Tag ca. 24,75 cm hoch.

c) Maximale Abnahme (AB II)

$f''(t) = 8 \cdot (t-2) \cdot e^{-t}$. Der Ansatz $f''(t) = 0$ führt auf $t_1 = 2$.

Die Wachstumsrate nimmt nach 2 Tagen am stärksten ab.

d) Fragestellung (AB III)

Innerhalb welchen 1-Tages-Zeitraums nimmt die Höhe der Pflanze um 2,5 cm zu?

Lösungen (AB III)

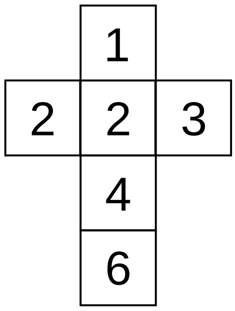
Gesucht ist ein senkrechter Streifen der Breite 1, der aus der Fläche zwischen dem Graphen und der t-Achse eine Fläche mit dem Inhalt 2,5 ausschneidet.
Die Lage des linken Randes des Streifens stellt eine Lösung der Gleichung dar.

<u>Aufgabe 5</u>

Teil 2: Stochastik

Input

Gegeben ist das Netz eines Würfels.



Aspekte im AB I:

- Die Zufallsgröße X beschreibt die Augenzahl beim einmaligen Würfeln.
  - Bestimmen von $P(X < 4)$
  - Bestimmen des Erwartungswerts von X

Aspekte im AB II:

- Erläutern der Bedeutung des Erwartungswerts
- Beurteilen, ob folgendes Spiel fair ist:
  Einsatz 1€; Gewinn bei Augenzahl 2: 3€; sonst: Einsatz geht verloren
- Bestimmen der Wahrscheinlichkeit beim zweimaligen Würfeln für Augensumme 8
- Beschreiben eines Zufallsexperiments mit diesem Würfel, das eine Bernoulli-Kette darstellt

Aspekte im AB III:

- „Der Erwartungswert einer Zufallsgröße ist der Wert, der am wahrscheinlichsten ist.“
  Beurteilen dieser Aussage
- Beim 100-maligen Würfeln werden sechs Sechser geworfen. Jemand macht die Aussage: „Ich zweifele an, dass der Würfel fair ist.“
  Beurteilen dieser Aussage

Aufgabe 6

Teil 1: Geometrie

a) Beschreiben Sie, welche gegenseitige Lage eine Ebene und eine Gerade im Raum haben können und wie man diese bestimmen kann.

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$ und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$.

b) Zeigen Sie, dass g und E parallel sind.

Die Gerade h schneidet die Gerade g orthogonal in $P(2|0|2)$ und verläuft parallel zur Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der von E den Abstand $3\sqrt{21}$ hat.

d) Von allen Geraden, die in der Ebene E liegen und parallel zu g verlaufen, ist die Gerade j diejenige mit dem geringsten Abstand zur Geraden g.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Geraden j bestimmen kann.

Aufgabe 6

Teil 1: Geometrie – Erwartungshorizont

a) Mögliche Lagen (AB I)

g liegt in E, g und E sind echt parallel, g schneidet E

Bestimmung (AB I)

Einsetzen der Geradengleichung in eine Koordinatengleichung der Ebene.
Keine Lösung: echt parallel, genau eine Lösung: Schnittpunkt, sonst liegt g in E.

b) Nachweis (AB I)

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$, also $g \,||\, E$.

Geradengleichung (AB II)

Der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu g und zum Normalenvektor von E.

Also ist $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathrm{IR})$.

c) Koordinaten (AB II)

Man wählt einen Punkt auf E, z. B. $Q(1|0|0)$.

Mit $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ erhält man den Punkt $R(4\,|\,6\,|\,-12)$.

d) Verfahren (AB III)

Die Gerade $k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathrm{IR})$ ist orthogonal zu E und g.

Bestimme den Schnittpunkt F von k und E.

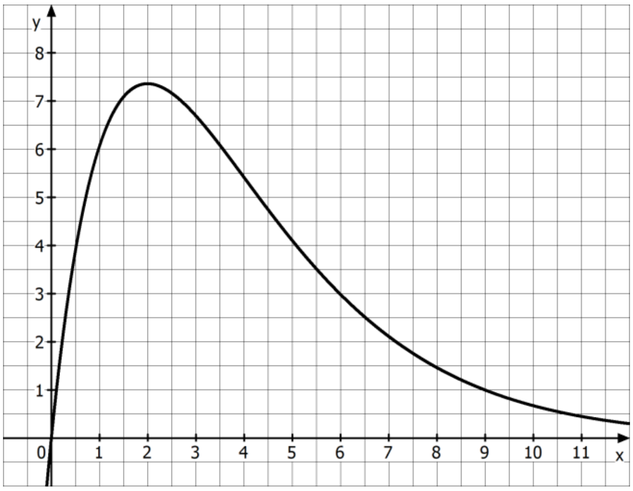
Eine Gleichung der gesuchten Geraden ist $j:\ \vec{x} = \overrightarrow{OF} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathrm{IR})$.

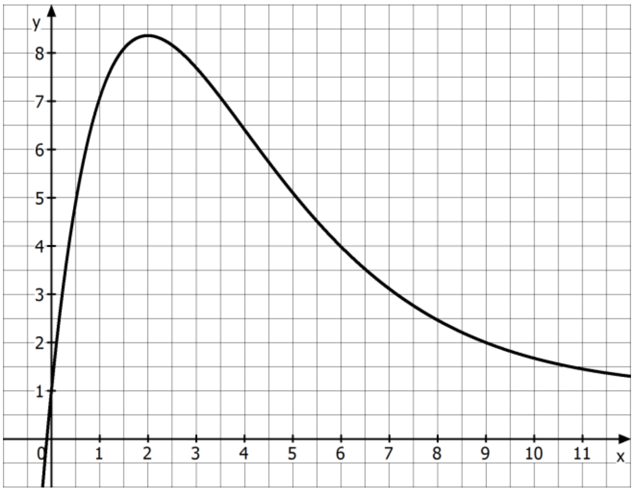
Aufgabe 6

Teil 2: Analysis

Input

Die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die Schneefallrate in einem Skigebiet (x in Stunden nach 6 Uhr, f(x) in cm pro Stunde).
Eine der Abbildungen zeigt den Graphen von f.





Aspekte im AB I:

- Zuordnen des Graphen
- Ermitteln der Schneefallrate nach einer Stunde
- Bestimmen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit (graphisch)
- Ermitteln des Zeitpunkts, zu dem die Schneefallrate am stärksten abnimmt (nur graphisch)

Aspekte im AB II:

- Berechnen des Zeitpunkts, zu dem es am stärksten schneit
- Ermitteln des Zuwachses an Schneehöhe in den ersten fünf Stunden (nur graphisch)

Aspekte im AB III:

- Annahme: die Schneefallrate nimmt vom Zeitpunkt $x = 4$ an konstant ab.
  Erläutern, wie man rechnerisch den Zeitpunkt bestimmt, zu dem es dann aufhört zu schneien
- Annahme: Es taut gleichzeitig mit einer Rate von 2 cm pro Stunde.
  Ermitteln der Zeitspanne, in der die Schneehöhe zunimmt

Aufgabe 7

Teil 1: Geometrie

Die Punkte $A(2|1|0)$ und $B(4|0|2)$ liegen auf der Geraden g.

a) Prüfen Sie, ob der Punkt $C(0|2|-2)$ auf der Geraden g liegt.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene $E: x_1 + 2x_2 = 4$ liegt.
Ermitteln Sie die Gleichung einer weiteren Ebene, die ebenfalls die Gerade g enthält.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D, der auf der Geraden g liegt und vom Punkt A den Abstand 9 hat.

d) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten eines Punktes P bestimmen kann, der mit den beiden Punkten A und B ein gleichseitiges Dreieck bildet.

Aufgabe 7

Teil 1: Geometrie – Erwartungshorizont

a) Punktprobe (AB I)

C liegt auf g, denn $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Nachweis (AB I)

Da A und B in E liegen ($2+2\cdot 1=4$ und $4+2\cdot 0=4$), liegt g in E.

Weitere Ebene (AB II)

z. B. $F: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t,u \in \mathbb{R})$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ weder zu $\overrightarrow{AB}$ parallel noch orthogonal zum Normalenvektor von E ist.

c) Punkt D (AB II)

Zum Beispiel $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $D(8\,|\,-2\,|\,6)$.

d) Verfahren (AB III)

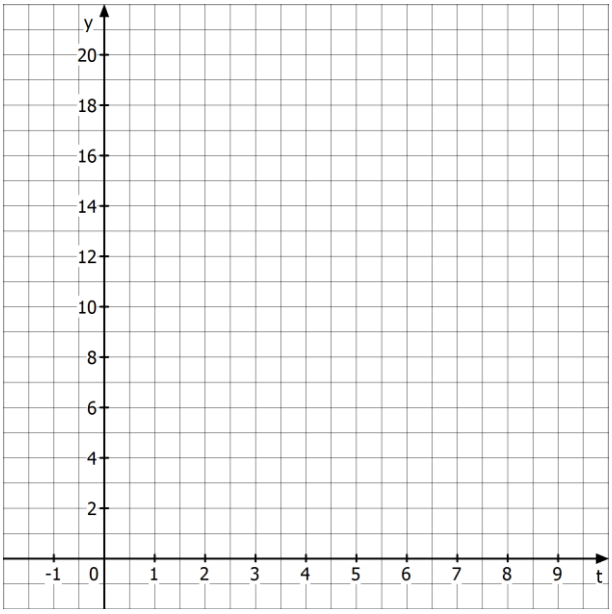
Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke AB. Wähle einen zu $\overrightarrow{AB}$ senkrechten Vektor $\vec{v}$. Bestimme einen Punkt P auf der Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \vec{v}$, sodass $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Aufgabe 7

Teil 2: Analysis

Input

Gegeben ist die Funktion f mit $f(t) = -2t^2 + 12t$.
In dem Intervall, in welchem $f(t) \geq 0$ ist, beschreibt f die momentane Zuflussrate von Wasser in ein Becken (t in Stunden; f(t) in Liter pro Stunde).
Zu Beginn enthält das Becken 20 Liter Wasser.



Aspekte im AB I:

- Ermitteln von Nullstellen, Extrempunkt des Graphen von f
- Erstellen einer Skizze des Graphen von f

Aspekte im AB II:

- Ermitteln des zugeflossenen Wasservolumens in der ersten Stunde

Zusätzlich zum Zufluss konstanter Abfluss seit Beginn: 10 Liter pro Stunde

- Graphisches Bestimmen der Zeitpunkte des minimalen und maximalen Wasservolumens
- Rechnerisches Bestimmen des Wasservolumens nach 3 Stunden
- Beschreiben des Wasservolumens in Abhängigkeit von der Zeit

Aspekte im AB III:

- Ab Zeitpunkt $t = 4$ soll die konstante Abflussrate so geändert werden, dass das Becken zum Zeitpunkt $t = 6$ leer ist.
  Erläutern der Vorgehensweise zur Bestimmung der notwendigen konstanten Abflussrate

Aufgabe 8

Teil 1: Geometrie

a) Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,3\,|\,-2)$ und $B(0\,|\,1\,|\,6)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke AB.
A und B liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.

Gegeben ist die Ebene $F: 2x_1 + x_2 = 4$.

b) Skizzieren Sie die Ebene F im Koordinatensystem.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden, die sowohl in F als auch in der x_1x_2-Ebene liegt.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem F die x_1x_3-Ebene schneidet.
Durch Ersetzen des Koeffizienten 2 in der Ebenengleichung von F durch eine reelle Zahl a mit $a \neq 0$ verändert sich der Schnittwinkel der Ebene mit der x_1x_3-Ebene.
Bestimmen Sie einen Wert von a, für den dieser Schnittwinkel 45° groß ist.
Untersuchen Sie, welche Größe dieser Schnittwinkel für $a \neq 0$ annehmen kann.

<u>Aufgabe 8</u>

Teil 1: Geometrie – Erwartungshorizont

a) <u>Mittelpunkt</u> (AB I)

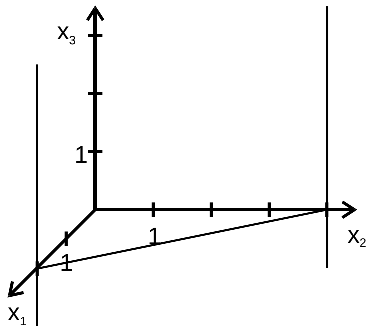
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\text{, somit } M(1\,|\,2\,|\,2).$$

<u>Koordinatengleichung von E</u> (AB II)

Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E. Damit ist auch $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. Punktprobe mit M ergibt $E: x_1 + x_2 - 4x_3 = -5$.

b) <u>Darstellung (siehe rechts)</u> (AB I)

$S_1(2\,|\,0\,|\,0)$, $S_2(0\,|\,4\,|\,0)$



<u>Geradengleichung</u> (AB II)

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + t \cdot \overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

c) <u>Winkel</u> (AB I)

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{ ; also } \alpha \approx 63{,}4^\circ.$$

<u>Wert von a</u> (AB III)

Die Größe des Winkels beträgt 45°, wenn die beiden Spurpunkte gleich weit vom Ursprung entfernt sind. Dies gilt für $a = \pm 1$.

<u>Größe des Schnittwinkels</u> (AB III)

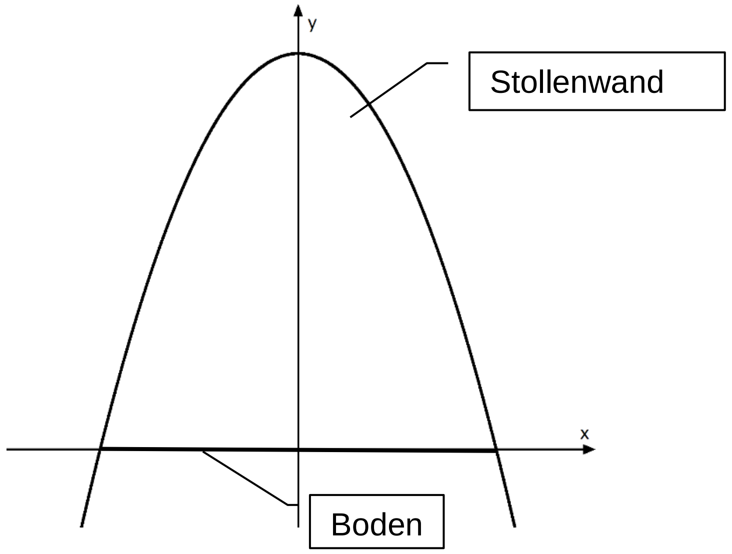
$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\text{. Wegen } 0 < \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} < 1 \text{ erhält man alle Winkel } 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

Aufgabe 8

Teil 2: Analysis

Input

Der Querschnitt eines Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse (Boden) und den Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$, der oberhalb der x-Achse verläuft (Stollenwände).



Aspekte im AB I:

- Skalieren der Achsen, Erklären der Form des Graphen
- Berechnen der Winkel, den die Wände mit dem Boden einschließen
- Ermitteln der Stellen, an denen die Wände am steilsten verlaufen

Aspekte im AB II:

- Schließen auf Eigenschaften von Graphen aus deren Ableitungen
- Der Bergstollen ist 50 m lang und läuft voll mit Wasser.
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen

Aspekte im AB III:

- Der Bergstollen ist 50 m lang und es steht 3,5 m hoch Wasser im Stollen,
  Bestimmung des Wasservolumens im Stollen
- Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
  Ermitteln der maximal möglichen Breite des Behälters

<u>Aufgabe 9</u>

Teil 1: Stochastik

In einer Urne befinden sich sechs blaue und vier weiße Kugeln. Betrachtet wird das Zufallsexperiment, bei dem aus der Urne mehrmals nacheinander eine Kugel mit Zurücklegen gezogen wird.

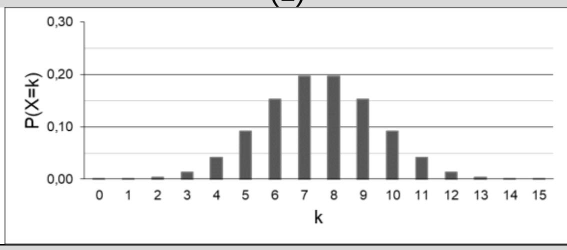
a) Das Zufallsexperiment wird dreimal nacheinander durchgeführt.
Geben Sie für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse jeweils einen Term an:
A: „Alle Kugeln sind blau."
B: „Genau zwei der gezogenen Kugeln sind blau."

Das Zufallsexperiment wird nun 15 Mal nacheinander durchgeführt.
Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der dabei gezogenen blauen Kugeln an.

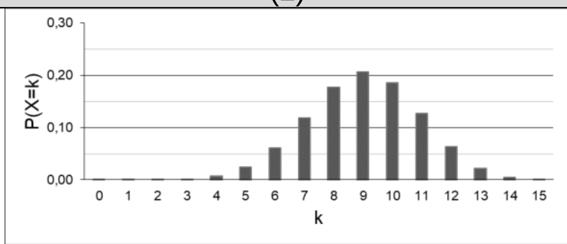
b) Begründen Sie, dass Y binomialverteilt ist.
Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y und erläutern Sie dessen Bedeutung für das durchgeführte Zufallsexperiment.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 5 und höchstens 10 blaue Kugel gezogen werden.

c) Die nebenstehenden Histogramme stellen die Binomialverteilungen von Zufallsgrößen bei 15-maliger Durchführung des entsprechenden Bernoulli-Experiments dar.
Untersuchen Sie, welches der Diagramme die Verteilung von Y darstellt.
Untersuchen Sie für die beiden anderen Diagramme, welche Aussagen jeweils über die zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit möglich sind.

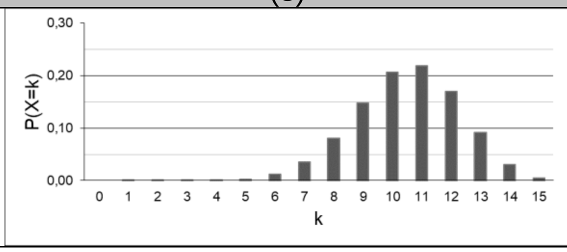
(1)



(2)



(3)



Aufgabe 9

Teil 1: Stochastik – Erwartungshorizont

a) Terme (AB I)

$P(A) = 0{,}6^3$

$P(B) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4$

b) Begründung (AB II)

Das Zufallsexperiment stellt eine Bernoullikette der Länge 15 dar: Die 15 Ergebnisse sind wegen des Zurücklegens unabhängig voneinander und es gibt bei jedem Zug nur zwei mögliche Ergebnisse.

Erwartungswert und Bedeutung (AB II)

$E(Y) = n \cdot p = 15 \cdot 0{,}6 = 9$. Führt man die Bernoullikette sehr oft durch, so werden auf lange Sicht im Mittel 9 von 15 gezogenen Kugeln blau sein.

Wahrscheinlichkeit (AB II)

$P(5 \le Y \le 10) = P(Y \le 10) - P(Y \le 4) \approx 0{,}773$

c) Zuordnung zur Verteilung von Y (AB II)

Da $E(Y) = 9$ ganzzahlig ist, muss der höchste Balken des Diagramms bei $k = 9$ liegen. Also zeigt (2) die Verteilung von Y.

Trefferwahrscheinlichkeiten (AB III)

(1) Da das Diagramm achsensymmetrisch ist, ist $p = 0{,}5$.

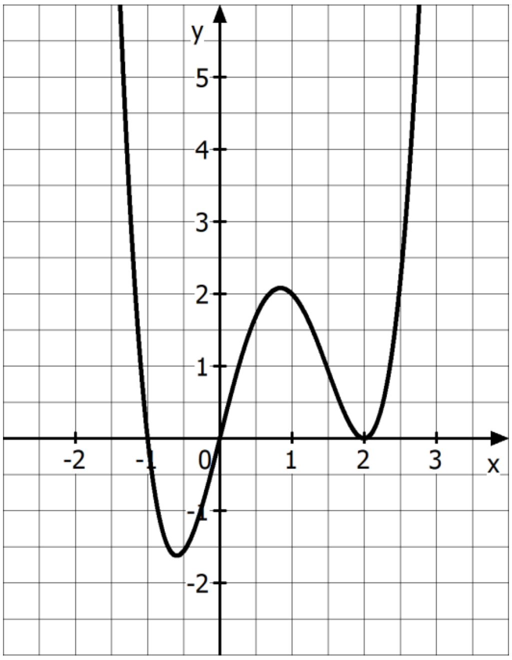
(3) Es muss gelten $10 < \mu < 12$. Somit $10 < 15p < 12 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < p < \frac{4}{5}$.

Aufgabe 9

Teil 2: Analysis

Input

Gegeben ist ausschnittsweise der Graph der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f.



Aspekte im AB I:

- Bestimmen von $f'(1)$
- Erläutern der Bedeutung von $f'(1) = 2$ für den Graphen von f
- Ermitteln der Nullstellen von f'

Aspekte im AB II:

- Erläutern der Bedeutung der Nullstellen von f' für den Graphen von f
- Untersuchen des Monotonieverhaltens von f
- Bestimmen eines Näherungswertes für $f''(1)$ und Erläuterung der Bedeutung für den Graphen von f
- Untersuchen des Krümmungsverhaltens des Graphen von f
- Erstellen einer Skizze des Graphen von f mit Zusatzinformationen $f(0) = 0,6;\ f(2) = 3$
  - Ermitteln des Inhalts der Fläche, die der Graph von f' im Intervall $[0; 2]$ mit der x-Achse einschließt
- Begründen, ob $f(-1) < f(0)$ oder $f(-1) = f(0)$ oder $f(-1) > f(0)$

Aspekte im AB III:

- Bestimmen des minimaler Grades einer Stammfunktion F von f
- Ermitteln eines möglichen Funktionsterms von f'

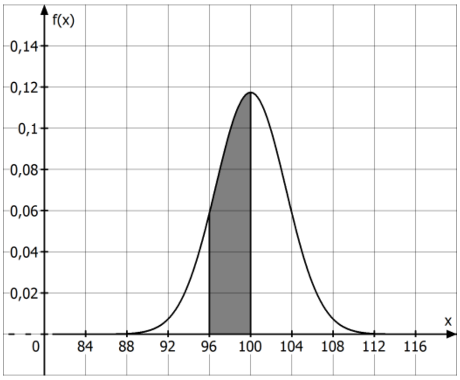
Aufgabe 10

Teil 1: Stochastik

Eine Firma stellt Plastikgussteile her, deren Längen um den Normwert 100 mm schwanken. Messungen zeigen, dass die Länge L der Gussteile normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 100 und der Standardabweichung 3,4 (alle Angaben in mm).

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge eines Gussteils weniger als 95 mm beträgt.
Geben Sie ein anderes Ereignis an, welches dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt.

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der zu dieser Situation gehörenden Glockenkurve dargestellt.



b) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe des Graphen den Erwartungswert und die Standardabweichung von L bestimmen könnte.

c) In der Abbildung ist eine Fläche grau markiert. Interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

Die Gussteile werden als mangelhaft eingestuft, wenn deren Länge um mehr als 5 mm vom Normwert abweicht.

d) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine solche Abweichung 14 % beträgt.

e) Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment im Sachzusammenhang und geben Sie dazu ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$0{,}14^{200} + 200 \cdot 0{,}14^{199} \cdot 0{,}86 + \binom{200}{2} \cdot 0{,}14^{198} \cdot 0{,}86^2$$

Aufgabe 10

Teil 1: Stochastik – Erwartungshorizont

a) Wahrscheinlichkeit (AB I)
$P(L < 95) \approx 0{,}071$

Ereignis (AB II)
$L > 105$

b) Erwartungswert und Standardabweichung (AB I)
Die Maximumstelle ist $x_1 = \mu$, die linke Wendestelle ist $x_2 = \mu - \sigma$.

c) Deutung der Fläche (AB II)
Der Inhalt dieser Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Plastikgussteil eine Länge zwischen 96 mm und 100 mm besitzt.

d) Begründung (AB II)
$p = 1 - P(95 \le L \le 105) \approx 0{,}141$

e) Zufallsexperiment und Ereignis (AB III)
Der laufenden Produktion werden 200 Gussteile zufällig entnommen.
Ereignis: „Es sind mindestens 198 dieser Gussteile mangelhaft.“

Aufgabe 10

Teil 2: Analysis

Input

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = -3 \cdot \sin(2x) - 1$ sowie vier Graphen.

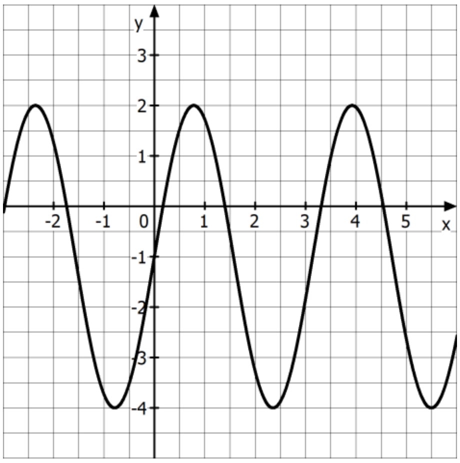


Abbildung 1

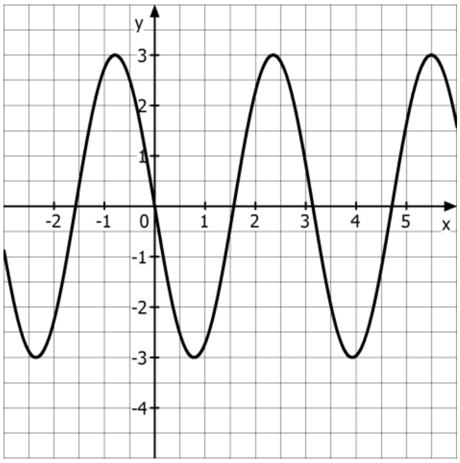


Abbildung 2

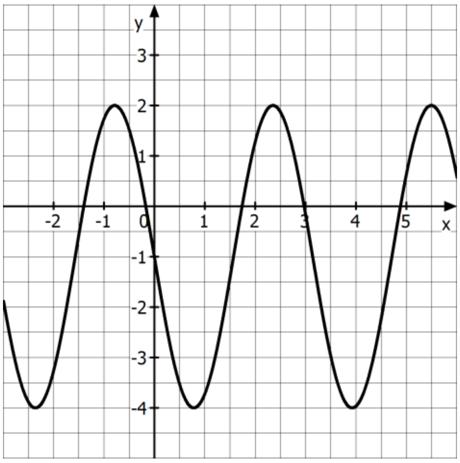


Abbildung 3

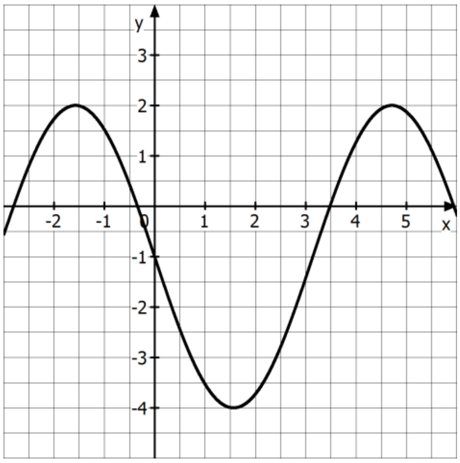


Abbildung 4

Aspekte im AB I:

- Nennen von charakteristischen Eigenschaften des Graphen von f, die man ohne Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann
- Zuordnen eines der vier Graphen zu f

Aspekte im AB II:

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g, für die gilt $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx = -3$.

  Bestimmen des Wertes von $\int_0^{3\pi/2} g(x)\,dx$ ohne weitere Rechnung

- Bestimmen einer Stammfunktion F von f
- Untersuchen der Symmetrieeigenschaften des Graphen von f'

Aspekte im AB III:

- Zur Abbildung 2 gehört eine trigonometrische Funktion g.
  Erläutern, dass die Anzahl der Schnittpunkte einer Ursprungsgerade und des Graphen von g nicht gerade (z.B. 266) sein kann (Symmetrie)
- Herleiten von $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -2$, ausgehend von der Symmetrie der Sinuskurve

Aufgabe 11

Teil 1: Stochastik

Die Körpergröße der erwachsenen Männer in einer Stadt ist normalverteilt.

a) Beschreiben Sie die Eigenschaften einer normalverteilten Zufallsgröße.
Gehen Sie dabei auch auf die Begriffe Erwartungswert und Standardabweichung ein.

Ein Mitarbeiter einer Fotoagentur geht durch eine Fußgängerzone und spricht Männer an, ob sie an einem Fotoshooting interessiert sind. Die ideale Körpergröße hierfür liegt zwischen 1,80 m und 1,90 m. Die folgende Vierfeldertafel zeigt das Ergebnis seiner Befragung:

	Ideale Körpergröße	Keine ideale Körpergröße	
Interesse am Fotoshooting	22%	19%	
Kein Interesse am Fotoshooting			
	37%		

b) Erläutern Sie die direkt aus dieser Vierfeldertafel ablesbaren Aussagen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann Interesse am Fotoshooting hat.
Aus einer Gruppe mit Männern der idealen Körpergröße wird zufällig ein Mann ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Mann kein Interesse am Fotoshooting hat.

c) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse
A: „Interesse am Fotoshooting“ und
B: „Ideale Körpergröße“
stochastisch unabhängig sind.

In einer Gruppe von zehn Männern haben vier Männer ideale Körpergröße.
Aus dieser Gruppe werden drei Männer zufällig ausgewählt.

d) Begründen Sie, dass die Binomialverteilung für Überlegungen zur Anzahl der ausgewählten Männer mit idealer Körpergröße nicht geeignet ist.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei der drei ausgewählten Männer ideale Körpergröße haben.

Aufgabe 11

Teil 1: Stochastik – Erwartungshorizont

a) Eigenschaften einer normalverteilten Zufallsgröße (AB II)
- Eine normalverteilte Zufallsgröße ist eine stetige Zufallsgröße, die alle reellen Werte in einem Intervall annehmen kann.
- Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit Hilfe von Flächenbetrachtungen an einer Glockenkurve beschreiben
- Diese Glockenkurve hat einen Hochpunkt an der Stelle des Erwartungswerts μ und ist achsensymmetrisch zu der Geraden mit der Gleichung $x = \mu$
- Die Wendepunkte liegen an den Stellen $x_1 = \mu - \sigma$ und $x_2 = \mu + \sigma$
- Je größer die Standardabweichung ist, umso flacher und breiter wird die Glockenkurve

b) Direkt ablesbare Aussagen (AB I)
- 37% der angesprochenen Männer haben die ideale Körpergröße.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann die ideale Körpergröße hat und am Fotoshooting interessiert ist, beträgt 22%.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann nicht die ideale Körpergröße hat und am Fotoshooting interessiert ist, beträgt 19%.

Erste Wahrscheinlichkeit (AB I)

$P(A) = 22\% + 19\% = 41\%$

Zweite Wahrscheinlichkeit (AB II)

$$P_B(\overline{A}) = \frac{37\% - 22\%}{37\%} \approx 40{,}5\%$$

c) Stochastische Unabhängigkeit (AB II)

$P(A) = 41\%$
$P(B) = 37\%$
$P(A) \cdot P(B) = 41\% \cdot 37\% = 15{,}17\% \neq 22\% = P(A \cap B)$

Also sind die Ereignisse nicht stochastisch unabhängig.

d) Begründung (AB III)

Da die Gesamtzahl der Männer dieser Gruppe verhältnismäßig klein ist und es sich um ein „Ziehen ohne Zurücklegen" handelt, ist die Binomialverteilung für die beschriebenen Überlegungen nicht geeignet.

Berechnen der Wahrscheinlichkeit (AB II)

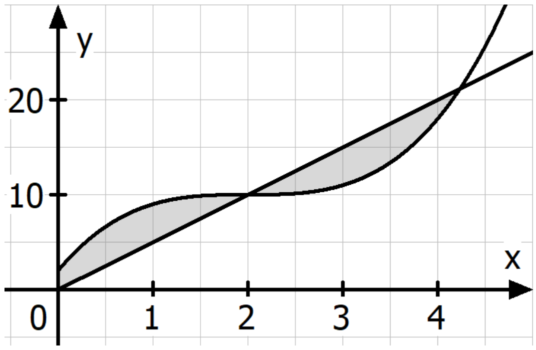
$3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 30\%$

Aufgabe 11

Teil 2: Analysis

Input

Gegeben sind der Graph der Funktion K mit $K(x) = (x-2)^3 + 10$ und der Graph einer zweiten Funktion E.
Die Kosten (in 1000 Euro) bei der Produktion von x Gramm eines Impfstoffs können durch die Funktion K beschrieben werden.
Die Einnahmen (in 1000 Euro) beim Verkauf von x Gramm dieses Impfstoffs können durch die Funktion E beschrieben werden.



Aspekte im AB I:

- Zuordnen eines der zwei Graphen zu K
- Bestimmen der Funktionsgleichung der Funktion E
- Skizzieren des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$
- Erläutern der Bedeutung eines Wendepunkts anhand des Graphen von K
- Bestimmen des Wendepunkts des Graphen von K
- Bestimmen der Produktionsmenge bei 15 000 € Kosten

Aspekte im AB II:

- Erläutern des Zusammenhangs zwischen den Graphen der Funktionen K und f mit $f(x) = x^3$
- Beschreiben des Rechenwegs zur Bestimmung der Tangente an den Graphen von K parallel zum Graph von E
- Erläutern des Rechenwegs zur Bestimmung des Flächeninhalts der gefärbten Fläche
- Interpretation des Verlaufs der Graphen von K und E im Sachzusammenhang
- Erläutern der Bedeutung von K(0) und E(0) im Sachzusammenhang
- Grafisches Bestimmen der Produktionsmengen, bei denen ein Gewinn erzielt wird
- Angeben der Funktionsgleichung der Gewinnfunktion

Aspekte im AB III:

- Grafisches Bestimmen der Produktionsmenge mit dem größten Gewinn
- Untersuchen von K auf Monotonie und Erläutern von deren Bedeutung
- Beurteilen von folgenden Aussagen:
  - *„Je größer die Produktionsmenge ist, desto höher sind die Kosten, die die Produktion eines zusätzlichen Gramms des Impfstoffs verursacht.“*
  - *„Die Zunahme der Kosten wird bis zu einer bestimmten Impfstoffmenge ständig kleiner, ab dieser nimmt sie wieder immer mehr zu.“*