(1) Ableitung

Anforderungen wie bisher, allerdings ohne Quotientenregel

Durch den Wegfall der Quotientenregel müssen „echte“ gebrochenrationale Funktionen wie zum Beispiel $f(x)=\frac{x}{3x^2-4}$ nicht mehr abgeleitet werden.

Sehr wohl denkbar ist beispielsweise aber die Ableitung von $f(x)=\frac{2}{3x^2-4}$.

(2) Stammfunktion, Integral

Anforderungen wie bisher

(3) Gleichungslehre

Anforderungen wie bisher, allerdings ohne Polynomdivision und Wurzelgleichungen

(4) Elemente der Kurvendiskussion

Anforderungen wie bisher

(5) Funktionenkompetenz

Anforderungen wie bisher, denkbar sind auch Aufgaben der folgenden Art:

Aufgabe 5.1

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=\sqrt{x}$ und $g(x)=x+15$.

a) Berechnen Sie
   - f(49)
   - f(g(49))
   - g(f(49))

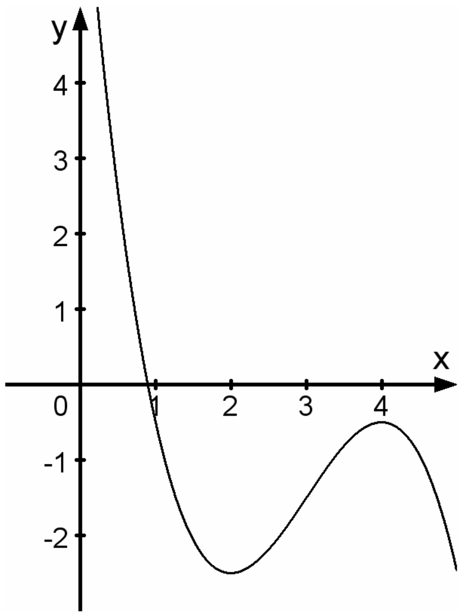
b) Für welchen Wert x ist f(g(x)) = 4 ?

(4 VP)

Aufgabe 5.2

Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 7{,}5$

hat den nebenstehenden Graphen.



a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung

$-0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 7{,}5 = 0$

nur eine Lösung hat.

b) Geben Sie einen Wert von a an, so dass die Gleichung $f(x) = a$ drei Lösungen hat.

(4 VP)

Aufgabe 5.3

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht?
Geben Sie jeweils eine Begründung für Ihre Entscheidung an.

a) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2}{x-a}$ hat zwei Asymptoten.

b) Es gibt ganzrationale Funktionen dritten Grades, die genau zwei Nullstellen besitzen.

c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat immer einen tiefsten Punkt.

(5 VP)

Aufgabe 5.4

Für welche Werte von x ist der Term $x \cdot (x+1)$ positiv? (3 VP)

Aufgabe 5.5

Vom Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades kennt man den Hochpunkt $H(3|5)$ und den Tiefpunkt $T(-2|1)$.
Was kann man ohne Bestimmung des Funktionsterms über die Anzahl der Nullstellen und über die Anzahl der Wendestellen sagen?
Begründen Sie Ihre Aussage. (3 VP)

Aufgabe 5.6

Für eine ganzrationale Funktion f gilt

$$f(0)=5\ ,\ f'(0)=0\ ,\ f''(0)<0$$

$$f(2)=0,\ f''(2)=0,\ f'''(2)\neq 0\ .$$

Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von f . (3 VP)

Aufgabe 5.7

Für die Funktion f gilt für alle $x\in[1\,;4]$

- $f(x)<0$
- $f'(x)>0$
- $f''(x)<0$

Welche Eigenschaften hat demnach der Graph von f ?

Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von f. (4 VP)

Aufgabe 5.8

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x)=\sin(x)$ und g mit $g(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)+3$.

Wie entsteht der Graph von g aus dem Graphen von f ? (3 VP)

(6) Lineare Gleichungssysteme, Inzidenzgeometrie

Anforderungen wie bisher, ohne Nachweis der linearen Unabhängigkeit.

(7) Metrische Geometrie

Anforderungen wie bisher

(8) Stochastik

Aufgabe 8.1

In einem Behälter befinden sich 2 rote und 4 blaue Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln rot ist.

b) Wie viele rote Kugeln hätten sich in dem Behälter befinden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine rote Kugel zu ziehen, $0{,}84$ betragen hätte?

(5 VP)

Aufgabe 8.2

In einem Behälter befinden sich 6 Kugeln mit den Nummern 1 bis 6.

Es wird solange ohne Zurücklegen gezogen, bis eine gerade Nummer gezogen wird.

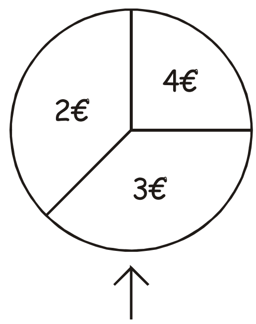
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass erst im dritten Zug eine gerade Nummer gezogen wird.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens dreimal zieht?

(3 VP)

Aufgabe 8.3

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt.
Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.



(3 VP)

Aufgabe 8.4

Ein Glücksrad hat die Sektoren mit den Zahlen 1, 2 und 3 mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Sektor	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,5

Das Glücksrad wird zu folgendem Glücksspiel verwendet:
Der Spieler zahlt zunächst 1 € Einsatz. Dann wird das Glücksrad dreimal gedreht. Sind die drei ermittelten Zahlen verschieden, bekommt der Spieler seinen Einsatz zurück. Kommt dreimal die „1“, erhält der Spieler 100 €. Sonst erhält er nichts.
Ist dieses Spiel fair? (3 VP)

Aufgabe 8.5

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,6$.

a) Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X ?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise $P(4 < X < 7)$ und $P(X \neq 5)$.

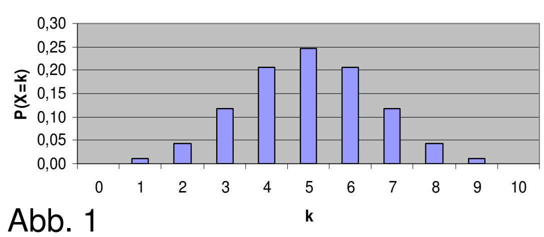


Abb. 1

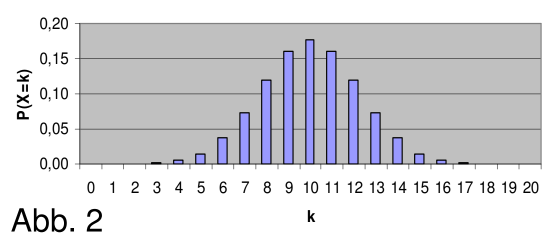


Abb. 2

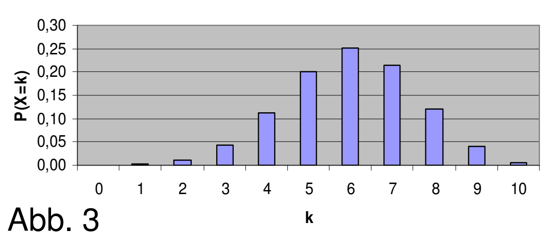


Abb. 3

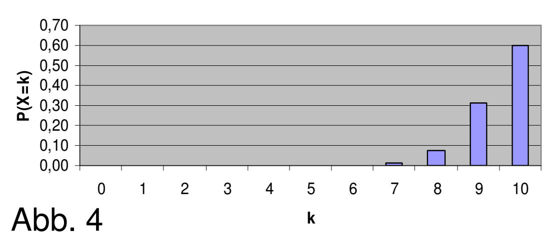


Abb. 4

(4 VP)

Aufgabe 8.6

Ein Basketballspieler übt Freiwürfe. Erfahrungsgemäß trifft er bei 80% seiner Würfe.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mit den ersten beiden Würfen zweimal?

b) Geben Sie ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$$P(A) = 0{,}2^{10} \quad , \qquad P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}8^{40} \cdot 0{,}2^{10}$$

(3 VP)

(9) Beschreiben, Begründen

Anforderungen wie bisher, denkbar sind auch Aufgaben der folgenden Art:

Aufgabe 9.1

Die täglichen Heizkosten eines Hauses werden durch $k(t)$ dargestellt.

Dabei ist t die Zeit in Tagen seit dem 1. Januar 2013.

Was bedeutet $\int_0^{90} k(t)\,dt$ bzw. $\frac{1}{90}\int_0^{90} k(t)\,dt$? (2 VP)

Aufgabe 9.2

Es soll eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades ermittelt werden, welche die Extremstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ besitzt.

Folgende Lösungsschritte werden vorgeschlagen:

(1) Ableitungsfunktion von g : $g'(x) = (x+2)\cdot(x-2)$

$g'(x) = x^2 - 4$

(2) Gleichung einer Stammfunktion von g': $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

a) Begründen Sie die Richtigkeit dieses Vorgehens.

b) Geben Sie die Funktionsgleichung einer weiteren ganzrationalen Funktion dritten Grades an, welche die Extremstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ besitzt.

(4 VP)

Aufgabe 9.3

Die folgenden Zeilen zeigen einen Teil der Lösung einer Geometrieaufgabe.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap E: \quad 2 \cdot 5t + (2 - t) - 3 \cdot (-1 + 3t) = 10$$

a) Was war gegeben?
   Wie lautete die Aufgabe?

b) Lösen Sie die Aufgabe vollständig.

(4 VP)

Aufgabe 9.4

Bei einem Fest möchte ein Besucher an einem Glücksrad spielen. Bevor er spielt, stellt er folgende Rechnung auf:

$$x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + x_3 \cdot P(x_3) = 1€ \cdot \frac{1}{3} - 3€ \cdot \frac{1}{2} + 4€ \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}€$$

a) Welche Information erhält er durch diese Rechnung?

b) Wie könnte das verwendete Glücksrad aussehen und die Gewinnregel lauten?
   Beschreiben Sie möglichst genau.

(3 VP)

Aufgabe A 1.1 (HT 2008, I 3, gekürzt und modifiziert)

Ein Fass mit Zu- und Ablauf besitzt ein Fassungsvermögen von 1200 Liter.

a) Die enthaltene Wassermenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}01t}$; $t \geq 0$ (t in Minuten, $f(t)$ in Liter).

Zu welchem Zeitpunkt ist das Fass zur Hälfte gefüllt?
Zeigen Sie, dass die Wassermenge im Fass stets zunimmt.
Weisen Sie nach, dass das Fass nicht überläuft.
Bestimmen Sie die mittlere Wassermenge während der ersten Stunde. (6 VP)

b) Bei einem anderen Füllvorgang befinden sich zunächst 800 Liter Wasser im Fass.
Die momentane Abflussrate beträgt 0,5% des jeweiligen Inhalts pro Minute.
Die Zuflussrate ist konstant.
Wie viele Liter pro Minute müssen zufließen, damit sich die Wassermenge im Fass nicht ändert?
Die Zuflussrate wird jetzt so gewählt, dass auf lange Sicht das Fass nicht überläuft, aber immer mindestens zur Hälfte gefüllt ist.
Welche Werte für die Zuflussrate sind dafür möglich? (4 VP)

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist für jedes $k \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_k mit $f_k(x) = x + k \cdot \frac{1}{x}$.

Bestimmen Sie die Anzahl der Extremstellen von f_k in Abhängigkeit von k. (5 VP)

alternativ:

Aufgabe A 1.2* (HT 2006, I 2.2 a)

Für jedes $a>0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

Wie wirkt sich eine Veränderung des Parameters a auf den Graphen von f_a aus?

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen einschließt. (5 VP)

Aufgabe A 2.1 (NT 2006, I 3.1, leicht gekürzt)

In einem Land mit ca. 6,0 Millionen Haushalten gab es zu Beginn des Jahres 2004 etwa 3,0 Millionen Haushalte mit einem DVD-Player.

Die Entwicklung der Anzahlen (in Millionen) seit dem Jahr 2000 kann modellhaft durch eine Funktion g dargestellt werden, die für $x \geq 0$ der Differenzialgleichung

$$g'(x) = 0{,}2 \cdot (5{,}2 - g(x)) \text{ genügt.}$$

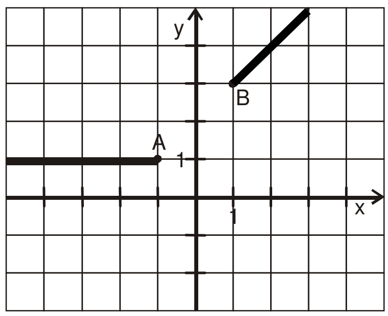
Dabei ist x die Anzahl der seit Beginn des Jahres 2000 vergangenen Jahre.

a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion g.
Mit welcher Anzahl von Haushalten mit DVD-Playern ist langfristig zu rechnen?
Zu welchem Zeitpunkt steht in 70% der Haushalte des Landes ein DVD-Player?
Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Haushalten mit DVD-Player von Mitte 2004 bis zu diesem Zeitpunkt.
Wann lag die Änderungsrate der Anzahlen erstmals unter 0,6 Millionen pro Jahr?
(7 VP)

b) Welche Größe wird durch $g'(4)$ beschrieben?
Erläutern Sie, wie man nur mit Hilfe von $g'(4)$ und $g(4)$ einen Näherungswert für $g(4{,}5)$ berechnen kann.
Bestimmen Sie diesen Näherungswert. (4 VP)

Aufgabe A 2.2

In der Skizze sind zwei geradlinige Gleise abgebildet, die in den Punkten A bzw. B enden. Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion, die dieses Gleisstück beschreibt.



(4 VP)

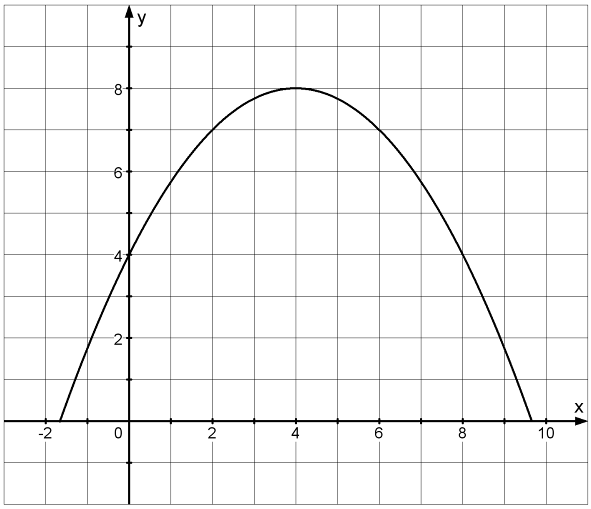
alternativ:

Aufgabe A 2.2*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$.

Wie muss $t > 0$ gewählt werden, damit der Mittelwert der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[0;t]$ möglichst groß ist? (4 VP)

Aufgabe A 3.1



Die Skizze zeigt den parabelförmigen Querschnitt eines 1,5 km langen, geradlinig und horizontal verlaufenden Straßentunnels.

a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm der im Bild dargestellten Funktion f .
Die Querschnittsfläche des Tunnels entspricht der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse begrenzen (Längeneinheit in m).
Wie viel Kubikmeter Gestein mussten beim Bau des Tunnels bewegt werden?
(Teilergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$) (5 VP)

b) Der Formelsammlung ist zu entnehmen, wie die Länge eines Kurvenstücks berechnet werden kann:

Das Kurvenstück k: $y = f(x)$ für $a \le x \le b$ hat die (Bogen-)Länge

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \ .$$

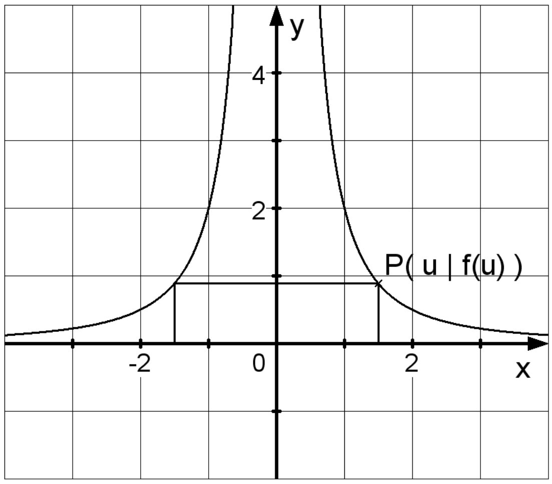
Bestimmen Sie mit dieser Formel die Länge des abgebildeten Parabelstücks.

Die gesamte innere Wandfläche des Tunnels wird gestrichen. Die Farbe wird in 250-Liter-Behältern geliefert.
Wie viele Behälter werden benötigt, wenn ein Liter Farbe für sechs Quadratmeter Wandfläche ausreicht? (4 VP)

Aufgabe A 3.2

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x)=\frac{2}{x^2}$, $x \neq 0$.



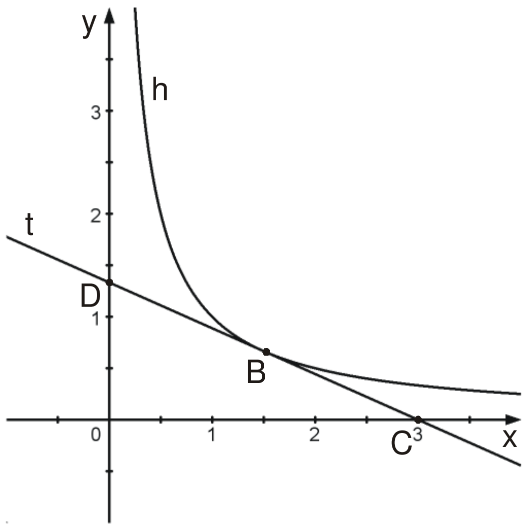
a) Das gezeichnete Rechteck rotiert um die y-Achse, wodurch ein Zylinder entsteht. Zeigen Sie, dass sein Volumen nicht von u abhängt. (2 VP)

b) Der Graph von f , die Gerade $x = 1$ und die x-Achse bestimmen eine nach rechts offene Fläche.
Berechnen Sie ihren Inhalt.
Welche Parallele zur y-Achse halbiert diese Fläche? (4 VP)

alternativ:

Aufgabe A 3.2*

Gegeben sind die Hyperbel h: $y=\frac{1}{x}$ und ein Punkt B auf h im 1. Feld.
Die Tangente t in B an h schneidet die x-Achse in C und die y-Achse in D .
Bestimmen Sie einen Punkt B so, dass das Dreieck OCD den Umfang 10 LE besitzt.



(6 VP)

Aufgabe Geo 1 (HT 2005, II 1, gekürzt und verändert)

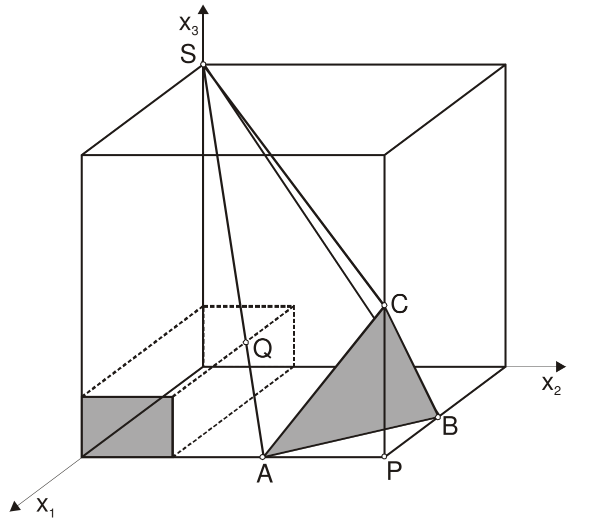
Gegeben sind eine Pyramide ABCDS mit den Punkten A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|8|0), D(0|8|0) und S(4|4|8) sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene $E_r : r\,x_1 + 3\,x_3 = 8r$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt. (4 VP)

b) Zeigen Sie, dass für den Winkel α zwischen der Ebene E_r und der Grundfläche ABCD der Pyramide $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{r^2+9}}$ gilt.
Bestimmen Sie einen Wert für r , für den $\alpha = 40°$ ist. (4 VP)

c) Beim Schnitt einer Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur.
Welche Schnittfiguren sind möglich?
Geben Sie jeweils die zugehörigen Werte von r an. (3 VP)

Aufgabe Geo 2 (HT 2008, II 1, Teile a und c)



In einem Würfel mit den Eckpunkten O(0|0|0), P(10|10|0) und S(0|0|10) befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze).
Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind A(10|6|0), B(6|10|0) und C(10|10|5).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der die Grundfläche der Pyramide liegt.
Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?
Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: $E: 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$) (6 VP)

b) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze).
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist? (5 VP)

Aufgabe Sto 1

In einem Gefäß U_1 sind zwei blaue Kugeln, in einem weiteren Gefäß U_2 sind acht rote Kugeln. Lisa darf mit verbundenen Augen eines der beiden Gefäße wählen und daraus eine Kugel ziehen. Ist die Kugel rot, dann gewinnt Lisa einen Preis.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lisa einen Preis gewinnt?

Lisa hat 50 weitere rote Kugeln zur Verfügung und darf nun bestimmen, wie viele zusätzliche rote Kugeln in U_1 gelegt werden. Allerdings werden dann genauso viele blaue Kugeln in U_2 gelegt.
Lisa wählt fünf zusätzliche rote Kugeln.
Hat sich dadurch ihre Gewinnwahrscheinlichkeit vergrößert?
Wie viele von den 50 zusätzlichen roten Kugeln hätte Lisa wählen müssen, um ihre Gewinnchancen zu maximieren? (7 VP)

Aufgabe Sto 2

Eine Klasse will für einen guten Zweck beim Schulfest ein Glücksrad betreiben. Dieses besteht aus drei Sektoren mit den folgenden Mittelpunktswinkeln:
rot: 180°, gelb: 90° und blau: 90°.
Bei einem Spiel dreht der Kunde das Glücksrad dreimal und bezahlt dafür einen Euro. Er erhält zwei Euro, wenn er dreimal dieselbe Farbe erreicht, er bekommt seinen Einsatz zurück, wenn genau zweimal dieselbe Farbe angezeigt wird, in allen anderen Fällen wird sein Einsatz einbehalten.

Welchen Gewinn erzielt die Klasse mit diesem Glücksrad pro Spiel durchschnittlich?

Die Klasse will im nächsten Jahr durch eine Veränderung der Sektorengrößen die Wahrscheinlichkeit der Fälle, in denen der Einsatz einbehalten wird, erhöhen. Dabei sollen die Spielregeln erhalten bleiben und der rote Sektor soll weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe.
Für welche Mittelpunktswinkel der drei Sektoren ist die Wahrscheinlichkeit für den Einbehalt des Einsatzes am größten? (6 VP)

Aufgabe Sto 3

a) Eine Urne enthält drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Franz und Hilde ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen eine Kugel, wobei Franz beginnt. Gewonnen hat, wer zuerst eine schwarze Kugel zieht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: Franz gewinnt,
B: Hilde gewinnt. (2 VP)

b) In einer anderen Urne sind drei weiße und n schwarze Kugeln.
Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Für welche Werte von n ist die Wahrscheinlichkeit, genau eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{3}{8}$? (4 VP)

Aufgabe Sto 4

Ein Glücksrad hat die Sektoren mit den Zahlen 1, 2 und 3 mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Sektor	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,5

a) Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens einmal die Zahl 1 zu bekommen? (2 VP)

b) Es besteht der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 1 größer als 0,2 ist. Daher wird die Hypothese H_0: $p \leq 0{,}2$ durch 100 Versuche getestet.
Wenn mehr als 28 Mal die 1 erscheint, wird die Hypothese abgelehnt.
Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit? (4 VP)

Aufgabe Sto 5

Eine Firma stellt Solartaschenrechner her. Die Herstellungskosten eines Rechners betragen 15 €. Die Firma verkauft ihn für 25 € an den Händler.
14,5% aller produzierten Rechner sind defekt. Jeder defekte Rechner wird vom Händler entdeckt. Die Firma erstattet den Kaufpreis und nimmt den defekten Rechner zurück.
Bei der Rücknahme entstehen der Firma zusätzlich Kosten in Höhe von 5 €.

a) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn der Firma pro Rechner? (2 VP)

b) Durch eine Kontrolle kann die Firma 95% der defekten Rechner herausfinden, hält aber auch 1% der intakten Rechner für defekt. Die beanstandeten Rechner werden dann nicht an den Händler verkauft, sondern ohne weitere Kosten entsorgt.
Wie viel darf die Kontrolle eines Rechners höchstens kosten, damit sie sich für die Firma rentiert? (4 VP)

Aufgabe Sto 6

Eine Firma, die Handys herstellt, behauptet, dass höchstens 4% der Geräte defekt seien. Die Behauptung soll mit einer Stichprobe von 250 Stück getestet werden. Man erhält 10 defekte Handys.
Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% schließen, dass die Firmenangabe nicht zutrifft? (4 VP)

Aufgabe Sto 7

Ein Computerhersteller bezieht von einem Lieferanten Speicherchips.
Erfahrungsgemäß sind 95% der Chips einwandfrei.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 30 Chips
   - mehr als 26 einwandfrei,
   - mindestens zwei defekt? (2 VP)

b) Der Computerhersteller überprüft die Hypothese, dass mindestens 95% der Chips einwandfrei sind, mit einer Stichprobe vom Umfang 100.
Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll höchstens 10% betragen.
Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich. (3 VP)

Aufgabe Sto 8

Ein Computerhersteller bezieht von einem Lieferanten Speicherchips.

a) Erfahrungsgemäß sind 80% der Chips einwandfrei.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 30 Chips mehr als 20 einwandfrei? (2 VP)

b) Wie groß dürfte die Defektwahrscheinlichkeit eines Chips höchstens sein, damit von 10 Chips mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit alle einwandfrei sind? (3 VP)

Alternative:

b*) Die Chips, die zu 80% einwandfrei sind, werden in Viererpackungen geliefert.
Ab welcher Anzahl Viererpackungen muss mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit damit gerechnet werden, dass in mindestens einer Packung alle Chips defekt sind? (4 VP)

Aufgabe Sto 9

Bei einem Test gibt es 10 Fragen mit jeweils 4 Antworten, von denen nur eine richtig ist.

a) Ein Kandidat kreuzt bei jeder Frage rein zufällig eine Antwort an.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er

A: genau 3 richtige Antworten,

B: mindestens 3 richtige Antworten,

C: mehr als 3, aber weniger als 8 richtige Antworten? (3 VP)

b) Es soll nun festgelegt werden, wie viele richtige Antworten zum Bestehen des Tests ausreichen sollen. Bei zufälligem Ankreuzen der Antworten soll die Wahrscheinlichkeit für ein Bestehen des Testes höchstens 5% betragen.
Wie viele richtige Antworten müssen dazu mindestens verlangt werden? (3 VP)

Aufgabe 5.1

a) $f(49)=\sqrt{49}=7$, $f(g(49))=\sqrt{49+15}=8$, $g(f(49))=\sqrt{49}+15=22$

b) $f(g(x))=4$: $\sqrt{x+15}=4$ liefert $x=1$.

Aufgabe 5.2

a) Die Lösungen der Gleichung sind die Nullstellen von f . Im Graphen von f sind zwei Extrempunkte unterhalb der x-Achse erkennbar. Weitere Extrempunkte kann eine Parabel dritter Ordnung nicht besitzen. Also ist die erkennbare Nullstelle $(x_1 \approx 0{,}9)$ die einzige Nullstelle von f.

b) Z. B. $a=-1$

Aufgabe 5.3

a) Aus $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x-a}=0$ folgt: $y=0$ ist waagrechte Asymptote.

Für $x=a$ ist der Nenner des Funktionsterms 0, der Zähler ungleich 0.

Daraus folgt: $x=a$ ist senkrechte Asymptote.

Die Aussage ist also wahr.

b) Die Aussage ist wahr.

Beispiel: f mit $f(x)=x^2\cdot(x-1)$ hat die Nullstellen $x_1=0$ und $x_2=1$.

c) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x)=-x^4$.

Aufgabe 5.4

Die Funktion f mit $f(x)=x\cdot(x+1)$ hat die Nullstellen $x_1=-1$ und $x_2=0$.

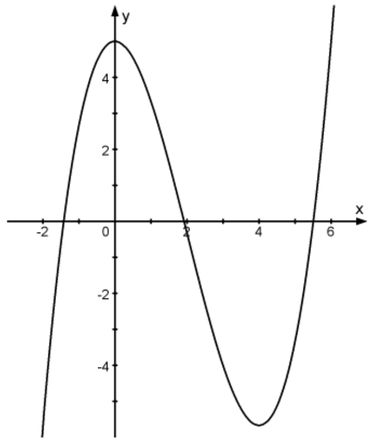
Ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Daher ist der Term $x\cdot(x+1)$ positiv im Bereich $x<-1$ sowie im Bereich $x>0$.

Aufgabe 5.5

Jede ganzrationale Funktion dritten Grades besitzt genau eine Wendestelle.
Jede ganzrationale Funktion dritten Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.
Da der Tiefpunkt T eine positive y-Koordinate besitzt, kann es keine weiteren Nullstellen geben.
Somit besitzt die Funktion genau eine Wendestelle und eine Nullstelle.

Aufgabe 5.6



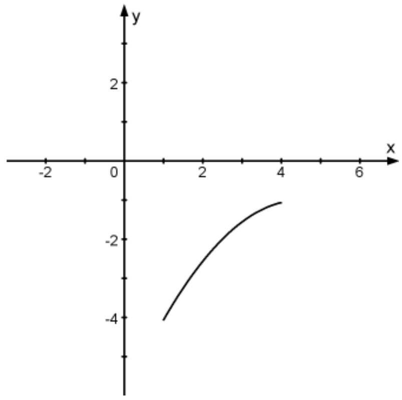
Aus $f(0)=5, f'(0)=0$ und $f''(0)<0$ folgt:

H(0|5) ist Hochpunkt.

Aus $f(2)=0, f''(2)=0$ und $f'''(2)\neq 0$ folgt:

W(2|0) ist Wendepunkt.

Aufgabe 5.7



Da $f(x)<0$ ist, verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.

Wegen $f'(x)>0$ ist f streng monoton steigend.

Wegen $f''(x)<0$ nimmt die Steigung des Graphen ab.

Aufgabe 5.8

Der Graph von f wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung und mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in y-Richtung gestreckt.

Anschließend wird der Graph um 3 Einheiten in y-Richtung verschoben.

Aufgabe 8.1

a) $P(\text{"mindestens eine rote Kugel"}) = 1 - P(bb) = 1 - \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{5}{9}$

b) Es sind 4 blaue und n rote Kugeln.

$$P(\text{"mindestens eine rote Kugel"}) = 1 - P(bb) = 1 - \frac{4}{n+4}\cdot\frac{4}{n+4}$$

$$1-\frac{16}{(n+4)^2}=0{,}84 \;\Leftrightarrow\; \frac{16}{(n+4)^2}=0{,}16 \;\Leftrightarrow\; (n+4)^2=100 \;\Leftrightarrow\; n=6 \quad (n=-14 \text{ entfällt})$$

Es hätten 6 rote Kugeln im Behälter sein müssen.

Aufgabe 8.2

u: ungerade Nummer, g: gerade Nummer

a) $P(uug) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

b) $P(\text{"höchstens drei Züge"}) = 1 - P(uuu) = 1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

Aufgabe 8.3

$E(\text{Auszahlung}) = \frac{1}{4} \cdot 4€ + \frac{3}{8} \cdot 3€ + \frac{3}{8} \cdot 2€ = \frac{23}{8}€$

$E(\text{Gewinn}) = E(\text{Auszahlung}) - 3€ = -\frac{1}{8}€$

Der Erwartungswert für den Gewinn beträgt –0,125 €.

Aufgabe 8.4

Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert für den Gewinn 0 € beträgt.

$E(\text{Auszahlung}) = 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 1€ + 0{,}2^3 \cdot 100€ = 0{,}18€ + 0{,}8€ = 0{,}98€$

$E(\text{Gewinn}) = E(\text{Auszahlung}) - 1€$ ist negativ, also ist das Spiel nicht fair.

Aufgabe 8.5

a) Für den Erwartungswert gilt: $E = n \cdot p = 6$, also muss P(X=6) maximal sein.

Daher zeigt Abbildung 3 die Verteilung von X.

b) $P(4 < X < 7) = P(5) + P(6) \approx 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45$

$P(X \neq 5) = 1 - P(5) \approx 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Aufgabe 8.6

a) P(„2 Treffer“) = $0{,}8^2 = 0{,}64$

b) A: Er wirft 10 Mal und trifft nie.

B: Er wirft 50 Mal und erzielt dabei genau 40 Treffer.

Aufgabe 9.1

$\int_0^{90} k(t)\,dt$ beschreibt die gesamten Heizkosten für die ersten 90 Tage des Jahres 2013.

$\frac{1}{90}\int_0^{90} k(t)\,dt$ beschreibt die durchschnittlichen täglichen Heizkosten der ersten 90 Tage des Jahres 2013.

Aufgabe 9.2

a) g besitzt Extremstellen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$, wenn g' an diesen Stellen Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

Dies führt auf den Ansatz $g'(x) = (x+2)\cdot(x-2) = x^2 - 4$.

g mit $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ ist eine Stammfunktion von g' und damit eine mögliche Lösung.

b) Z. B. $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$

Aufgabe 9.3

a) Gegeben waren zwei Punkte $A(0|2|-1)$ und $B(5|1|2)$ sowie eine Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10$.

Aufgabe: Untersuchen Sie, ob die Ebene E und die Gerade g durch A und B gemeinsame Punkte besitzen.

b) $10t + 2 - t + 3 - 9t = 10 \Leftrightarrow 5 = 10$.

Die Gerade g hat keine gemeinsamen Punkte mit der Ebene E .

Aufgabe 9.4

a) Durch die Rechnung erhält er den Erwartungswert seines Gewinns.

Pro Spiel wird er durchschnittlich 50 Cent verlieren.

b) Ein mögliches Glücksrad enthält 3 Sektoren.

Die Mittelpunktswinkel der Sektoren sind 120°, 180° und 60°,

der jeweilige Gewinn beträgt 1€, –3€ bzw. 4€.

Aufgabe A 1.1

a) Halbe Füllmenge:

$f(t) = 600$ liefert $t = -100 \cdot \ln(0{,}5) \approx 69{,}3$.

Nach knapp 70 Minuten ist der Behälter bis zur Hälfte gefüllt.

Zunahme der Wassermenge:

$f'(t) = 8 \cdot e^{-0{,}01t} > 0$ für alle $t \geq 0$.

Die Wassermenge im Behälter nimmt also stets zu.

Kein Überlauf:

$f(t) \to 1000 < 1200$ für $t \to \infty$.

Mittlere Wassermenge während der ersten Stunde:

$$\frac{1}{60}\int_0^{60} f(t)\,dt \approx 398{,}4 \text{ (GTR)}$$

Die mittlere Wassermenge beträgt also etwa 398 ℓ während der ersten Stunde.

b) Zuflussrate:

Weil sich die Wassermenge nicht ändert, fließen konstant 0,5% von 800 (also 4) Liter pro Minute ab, also muss die konstante Zuflussrate ebenfalls 4 Liter pro Minute betragen.

Mögliche Werte für die konstante Zuflussrate a :

Es gilt $f'(t) = a - 0{,}005 \cdot f(t)$ und somit $f'(t) = 0{,}005 \cdot \left(\frac{a}{0{,}005} - f(t)\right)$.

Der Grenzwert der Funktion f ist demnach $\frac{a}{0{,}005}$.

Aus $\frac{a}{0{,}005} = 600$ bzw. $\frac{a}{0{,}005} = 1200$ folgt $a = 3$ bzw. $a = 6$.

Mögliche Werte für die Zuflussrate sind: $3 \leq a \leq 6$ (in ℓ/min)

Aufgabe A 1.2

$f_k'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$, $f_k''(x) = \frac{2k}{x^3}$

Der Ansatz $f_k'(x) = 0$ führt für $x \neq 0$ auf $x^2 = k$.

Diese Gleichung besitzt nur für $k > 0$ Lösungen; diese sind $x_{1,2} = \pm\sqrt{k}$.

Da f'' an diesen beiden Stellen ungleich Null ist, handelt es sich um Extremstellen.

Deshalb hat f_k für $k > 0$ genau zwei Extremstellen, für $k \leq 0$ keine Extremstellen.

Aufgabe A 1.2*

Auswirkung einer Veränderung des Parameters a

Mit wachsendem a wird das Schaubild von f_a sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestaucht.

Flächenberechnung

$f_a(x)=0$ führt zu $\sin(ax)=0$. Benachbarte Nullstellen sind z.B. $x_1=0$ und $x_2=\frac{\pi}{a}$.

Für den Flächeninhalt gilt: $A(a)=\int_0^{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(ax)\right)dx=\left[-\frac{1}{a^2}\cdot\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a^2}$.

Aufgabe A 2.1

a) Funktionsterm

Es liegt beschränktes Wachstum vor.

Ansatz: $g(x)=S-c\,e^{-kx}$.

Der Differentialgleichung entnimmt man $S=5{,}2$ und $k=0{,}2$.

Mit $g(4)=3$ ergibt sich $c\approx 4{,}9$ (GTR) und damit $g(x)=5{,}2-4{,}9\,e^{-0{,}2x}$.

Langfristige Entwicklung

Der Grenzwert der Funktion g ist S = 5,2.

Langfristig ist mit 5,2 Millionen Haushalten mit DVD-Playern zu rechnen.

DVD-Player in 70% der Haushalte

Der Ansatz $g(x)=4{,}2$ liefert $x\approx 7{,}95$ (GTR).

Am Ende des Jahres 2007 steht in 70% der Haushalte ein DVD-Player.

Mittelwert

$$\overline{m}=\frac{1}{3{,}45}\int_{4{,}5}^{7{,}95}g(x)\,dx\approx 3{,}8 \quad \text{(GTR)}.$$

Die mittlere Anzahl von DVD-Playern beträgt etwa 3,8 Millionen.

Änderungsrate unter 0,6 Millionen pro Jahr

Aus $g'(x)=0{,}6$ ergibt sich $x\approx 2{,}45$, wobei g' an dieser Stelle fällt (GTR).

Etwa Mitte 2002 lag die Änderungsrate erstmals unter 0,6 Millionen pro Jahr.

b) g'(4) beschreibt die momentane Änderungsrate der verkauften Stückzahlen nach 4 Jahren, also zu Beginn des Jahres 2004.

Man erhält einen Näherungswert für g(4,5), indem man ab x=4 die konstante Änderungsrate g'(4) ansetzt:

$g(4{,}5) \approx g(4) + 0{,}5 \cdot g'(4) \approx 3{,}22$

Aufgabe A 2.2

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

$$\begin{array}{llllllll} f(-1)=1: & -a & +b & -c & +d & = & 1 \\ f'(-1)=0: & 3a & -2b & +c & & = & 0 \\ f(1)=3: & a & +b & +c & +d & = & 3 \\ f'(1)=1: & 3a & +2b & +c & & = & 1 \end{array}$$

Lösung: $a = -\frac{1}{4};\ b = \frac{1}{4};\ c = \frac{5}{4};\ d = \frac{7}{4}$ (GTR)

$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$

Aufgabe A 2.2*

Mittelwert: $m(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (4x - x^2)\,dx = \frac{1}{t}\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^t = 2t - \frac{1}{3}t^2$

m(t) wird maximal für $t = 3$ (GTR).

Der Mittelwert der Funktionswerte ist auf dem Intervall [0;3] am größten.

Aufgabe A 3.1

a) Bestimmung des Funktionsterms

Es handelt sich um eine Parabel mit dem Scheitelpunkt S(4|8).

Ansatz: $f(x) = a \cdot (x-4)^2 + 8$

Aus f(0) = 4 ergibt sich $a = -\frac{1}{4}$.

Also: $f(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 8$.

Gesteinsvolumen

f besitzt die Nullstellen $x_1 \approx -1{,}657$ und $x_2 \approx 9{,}657$ (GTR)

Querschnittsfläche: $A = \int_{x_1}^{x_2}\left(-\frac{1}{4}(x-4)^2 + 8\right)dx \approx 60{,}34$ (GTR)

Volumen: $V = A \cdot 1500 \approx 90510$

Es müssen etwa 90510 m^3 Gestein bewegt werden.

b) Länge des Parabelstücks

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \approx 20{,}50 \text{ (GTR)}$$

Anzahl der Behälter

Wandfläche: $W = s \cdot 1500 \approx 30744$ [m²]

Farbmenge: $M = W / 6 \approx 5124$ [Liter]

Man benötigt also 21 Behälter.

Aufgabe A 3.2

a) $V(u) = \pi u^2 f(u) = \pi u^2 \dfrac{2}{u^2} = 2\pi$

Das Volumen ist also unabhängig von u.

b) Flächeninhalt

$$A(z) = \int_1^z \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^z = 2 - \frac{2}{z}$$

Inhalt der nach rechts offenen Fläche: $A = \lim\limits_{z\to\infty} A(z) = 2$

Halbierung der Fläche

$$A(z) = \frac{1}{2}A \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \frac{2}{z} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2$$

Die Parallele hat die Gleichung $x = 2$.

Aufgabe A 3.2*

Berührpunkt sei $B\left(k \,\middle|\, \dfrac{1}{k}\right)$

Tangentengleichung an h in B: $y(x) = -\dfrac{1}{k^2}x + \dfrac{2}{k}$ (mit $k > 0$)

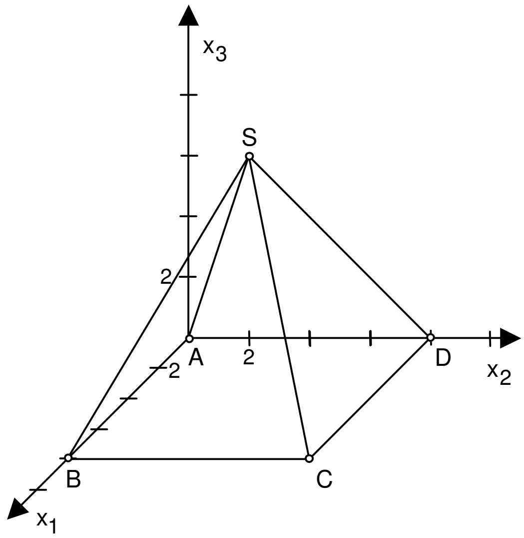
Schnittpunkt mit der x-Achse: $C(\,2k \mid 0\,)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $D(\,0 \mid \dfrac{2}{k})$

Umfang des Dreiecks OCD: $u(k) = 2k + \dfrac{2}{k} + \sqrt{4k^2 + \dfrac{4}{k^2}}$.

$u(k) = 10$ führt z. B. auf $k_1 \approx 0{,}44$ und damit auf $B(0{,}44 \mid 2{,}26)$

Aufgabe Geo 1



a) Punktprobe zeigt, dass B und C in allen Ebenen E_r liegen. Damit liegt auch die Gerade durch B und C in allen Ebenen E_r.

b) $\vec{n_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E_r und

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Grundflächenebene der Pyramide.

Dann gilt für den Winkel α: $\cos\alpha = \frac{\vec{n}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{n}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{r^2+9}}$.

Die Gleichung $\frac{3}{\sqrt{r^2+9}} = \cos(40°)$ besitzt z. B. die Lösung $r_1 \approx 2{,}52$.

c) Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entstehen folgende Schnittfiguren:

- Quadrat für $r = 0$ (dabei liegt A in E_0)
- gleichschenkliges Trapez für $0 < r < 6$
- gleichschenkliges Dreieck für $r = 6$ (dabei liegt S in E_6)

Für $r<0$ oder $r>6$ hat die Ebene E_r mit der Pyramide nur die Strecke BC gemeinsam.

Aufgabe Geo 2

a) Koordinatengleichung von E

Aus einer Parametergleichung von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

ergibt sich nach Elimination von r und s eine Koordinatenform:

E: $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$.

Winkelberechnung

Für den Winkel α zwischen der Grundfläche der Pyramide und der Schachtelgrundfläche gilt: $\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{66}} = \frac{4}{\sqrt{66}}$; $\alpha \approx 60{,}5°$.

Höhe der Pyramide und Diagonale PS

Ein Richtungsvektor der Geraden, auf der die Höhe der Pyramide liegt, ist

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ein Richtungsvektor der Geraden, auf der die Diagonale des Würfels

liegt, ist $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Da diese beiden Richtungsvektoren linear unabhängig sind, liegt die Höhe der Pyramide nicht auf der Diagonalen PS.

b) Quadervolumen für b = 4

Gerade k durch A und S: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Für den Berührpunkt Q gilt: $x_2 = 4$.

Einsetzen in k liefert $t = \frac{1}{3}$.

Die Quaderhöhe ist damit die x_3-Koordinate von Q: $c = \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{10}{3}$.

Für das Quadervolumen ergibt sich $V_Q = 4 \cdot \frac{10}{3} \cdot 10 = \frac{400}{3}$.

Werte für das Quadervolumen

Für den Berührpunkt Q gilt nun: $x_2 = b$.

Einsetzen in die Gleichung von k liefert: $b = 6 - 6t$; $t = 1 - \frac{1}{6}b$.

Die Quaderhöhe ist dann: $c(b) = 10 - \frac{5}{3}b$.

Damit ergibt sich für das Quadervolumen: $V(b) = b \cdot (10 - \frac{5}{3}b) \cdot 10 = 100 \cdot b - \frac{50}{3} \cdot b^2$.

Extremwertuntersuchung: $V'(b) = 100 - \frac{100}{3}b$; $V''(b) = -\frac{100}{3} < 0$.

$V'(b) = 0$ ergibt $b = 3$.

Also: Relatives Maximum an der Stelle 3 mit $V(3) = 150$.

Wegen $V(0) = V(6) = 0$ ergeben sich für das Quadervolumen $V(b)$ die Werte $0 < V(b) \le 150$.

Aufgabe Sto 1

Da die Wahl des Gefäßes über den Gewinn entscheidet, ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

<u>5 zusätzliche rote Kugeln</u>

Wahrscheinlichkeit aus U_1 eine rote Kugel zu ziehen: $\frac{5}{7}$

Wahrscheinlichkeit aus U_2 eine rote Kugel zu ziehen: $\frac{8}{13}$

Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{13}=\frac{121}{182}\approx 0{,}665$,

also hat sich die Gewinnwahrscheinlichkeit von Lisa verbessert.

<u>Maximierung der Gewinnchance</u>

Lisa legt x $(x \le 50)$ rote Kugeln in U_1 und x blaue Kugeln in U_2,damit ist

die Wahrscheinlichkeit aus U_1 eine rote Kugel zu ziehen $\frac{x}{2+x}$,

die Wahrscheinlichkeit aus U_2 eine rote Kugel zu ziehen $\frac{8}{8+x}$.

Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen beträgt damit:

$$P(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{8+x}$$

Das Maximum liegt bei $x \approx 4$, mit $P(4) \approx 0{,}667$ (GTR).

Lisa maximiert mit 4 zusätzlichen Kugeln ihre Gewinnchancen.

Aufgabe Sto 2

<u>Erwartungswert für den Gewinn der Klasse</u>

$P(r)=\frac{1}{2}$; $P(g)=P(b)=\frac{1}{4}$

$$P(rrr)+P(ggg)+P(bbb)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{5}{32}$$

P(„alle verschieden“) = $6\cdot P(rgb)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{32}$

Erwartungswert für den Gewinn der Klasse: $E=\frac{5}{32}\cdot(-1€)+\frac{6}{32}\cdot 1€=\frac{1}{32}€$

Pro Spiel werden also durchschnittlich ca. 3 Cent Gewinn erreicht.

Maximaler Gewinn der Klasse

Setzt man die Wahrscheinlichkeit für den roten Sektor gleich x, dann ergibt sich:

$P(r) = x$; $P(g) = \frac{x}{2}$; $P(b) = 1 - P(r) - P(g) = 1 - \frac{3}{2}x$

Ereignis A: Einsatz wird einbehalten.

$P(A) = 6 \cdot x \cdot \frac{1}{2}x \cdot \left(1 - \frac{3}{2}x\right) = 3x^2 - \frac{9}{2}x^3$

Maximale Wahrscheinlichkeit für A ergibt sich für $x_1 \approx 0{,}44$ (GTR).

Der Mittelpunktswinkel für den roten Sektor muss also $x_1 \cdot 360° \approx 160°$ betragen;

der gelbe Sektor wird demzufolge $80°$ und der blaue Sektor $120°$ erhalten.

Aufgabe Sto 3

a) $P(A) = P(s) + P(wws) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

$P(B) = 1 - P(A) = \frac{2}{5}$

b) $P(\text{„genau eine schwarze Kugel"}) = 2 \cdot \frac{3}{3+n} \cdot \frac{n}{n+3}$

Gleichsetzen mit $\frac{3}{8}$ führt auf $n^2 - 10n + 9 = 0$ mit den Lösungen $n_1 = 1$ und $n_2 = 9$.

Für eine bzw. neun schwarze Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit, genau eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{3}{8}$.

Aufgabe Sto 4

a) X: Anzahl der Zahl 1.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n \geq 0{,}95$ ergibt $n \geq 14$ (GTR).

Das Glücksrad muss mindestens 14 Mal gedreht werden.

b) Gilt H_0, dann ist X im Extremfall $B_{100;0,2}$-verteilt.

$P(X > 28) = 1 - P(X \leq 28) = 1 - 0{,}97998 \approx 0{,}02$ (GTR)

Damit ist die Irrtumswahrscheinlichkeit etwa 2%.

Aufgabe Sto 5

a) Erwartungswert für den Gewinn: $0{,}855 \cdot 10€ + 0{,}145 \cdot (-20€) = 5{,}65€$

Der durchschnittliche Gewinn der Firma pro Rechner ist 5,65 €.

b) Es gibt vier Fälle mit folgenden Wahrscheinlichkeiten und Gewinnen:

Fall	**Wahrscheinlichkeit**	**Gewinn**
Rechner ok, Kontrolle korrekt	$0{,}855 \cdot 0{,}99 = 0{,}84645$	10–k
Rechner ok, Kontrolle falsch	$0{,}855 \cdot 0{,}01 = 0{,}00855$	–15–k
Rechner defekt, Kontrolle korrekt	$0{,}145 \cdot 0{,}95 = 0{,}13775$	–15–k
Rechner defekt, Kontrolle falsch	$0{,}145 \cdot 0{,}05 = 0{,}00725$	–20–k

Erwartungswert für den Gewinn:

$E = 0{,}84645 \cdot (10-k) + 0{,}00855 \cdot (-15-k) + 0{,}13775 \cdot (-15-k) + 0{,}00725 \cdot (-20-k)$

$\quad = 6{,}125 - k \quad [\text{in } €]$

Die Kontrolle lohnt sich, falls $E > 5{,}65$ und damit $k < 0{,}475$ ist.

Die Kontrolle eines Rechners darf also höchstens 0,47 € kosten.

Aufgabe Sto 6

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der defekten Geräte (unter 250) an.

Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}04$ (höchstens 4% der Geräte sind defekt)

Gilt H_0, dann ist X im Extremfall $B_{250;0,04}$-verteilt.

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0{,}455 = 0{,}545$ (GTR)

Damit ist die Irrtumswahrscheinlichkeit deutlich höher als 5%.

Aufgabe Sto 7

a) X gebe die Anzahl der einwandfreien Chips unter 30 Chips an.

X ist $B_{30;0,95}$ verteilt.

- Wahrscheinlichkeit für mehr als 26 einwandfreie Chips:
  $P(X > 26) = 1 - P(X \leq 26) \approx 1 - 0{,}061 = 0{,}939 = 93{,}9\%$ (GTR)
- Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei defekte Chips:
  $P(X \leq 28) \approx 0{,}446 = 44{,}6\%$ (GTR)

b) X gebe die Anzahl der einwandfreien Chips unter 100 Chips an.

Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}95$ (mindestens 95% der Chips sind einwandfrei)

Gilt H_0, dann ist X im Extremfall $B_{100;0,95}$-verteilt.

Gesucht ist der Ablehnungsbereich A von H_0 bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10%.

Es gilt $A = \{0; 1; ...; g\}$, wobei g die größte natürliche Zahl ist mit $P(X \leq g) \leq 0{,}1$.

GTR liefert: $P(X \leq 91) \approx 0{,}063$; $P(X \leq 92) \approx 0{,}128$.

Ablehnungsbereich: $A = \{0; 1; .....; 91\}$.

Aufgabe Sto 8

a) X gebe die Anzahl der einwandfreien Chips unter 30 Chips an.

X ist $B_{30;0,8}$-verteilt.

Wahrscheinlichkeit für mehr als 20 einwandfreie Chips:

$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) \approx 1 - 0,061 = 0,939 = 93,9\%$ (GTR).

b) Es sei p die Defektwahrscheinlichkeit eines Chips.

$(1-p)^{10} \geq 0,9$ führt auf $1-p \geq \sqrt[10]{0,9}$ und damit auf $p \leq 1-\sqrt[10]{0,9} \approx 0,0105$.

Die maximale Defektwahrscheinlichkeit dürfte höchstens etwa 1% betragen.

b*) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Viererpackung alle Chips defekt sind, beträgt $0,2^4 = 0,0016$, also sind mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,9984$ nicht alle vier Chips einer Packung defekt.

Für die Anzahl n der Viererpackungen muss also gelten $1 - 0,9984^n > 0,5$.

Dies führt auf $n \geq 433$ (GTR).

Ab 433 Viererpackungen muss mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit mit mindestens einer Viererpackung gerechnet werden, in der alle Chips defekt sind.

Aufgabe Sto 9

Die Anzahl X der richtigen Antworten ist $B_{10;0,25}$-verteilt.

a) $P(A) = P(X = 3) \approx 0,25 = 25\%$

$P(B) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,526 = 0,474 = 47,4\%$

$P(C) = P(3 < X < 8) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) \approx 0,224 = 22,4\%$

b) Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl g mit $P(X \geq g) \leq 0,05$:

$P(X \geq g) \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq g-1) \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq g-1) \geq 0,95$

GTR liefert $P(X \leq 4) \approx 0,92$ und $P(X \leq 5) \approx 0,98$

Daraus ergibt sich $g - 1 = 5$, d.h. $g = 6$.

Es müssen mindestens 6 richtige Antworten verlangt werden.