

Erwartete Kompetenzen im Bereich der Gleichungslehre

0. Grundtechniken

- Faktorisierung durch Ausklammern
- nicht: Faktorisierung in schwierigen Fällen
(Anwendung einer binomischen Formel „rückwärts“, Polynomdivision)
- Substitution
- Einsetzungsverfahren
- Fallunterscheidung in einfachen Fällen (z.B. bei Gleichungen mit Parametern)

1. Lineare Gleichungen

- auch: Untersuchung der Lösbarkeit linearer Gleichungen mit Parameter

Beispiel

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von a : $ax = x + 3$

2. Quadratische Gleichungen

- Lösen quadratischer Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten
- Untersuchung der Lösbarkeit quadratischer Gleichungen mit Parameter

Beispiele

2.1 $\frac{5}{2}x^2 - 4x = 2$

2.2 $2x^2 = 1,8x + 0,4$ (mit WTR)

2.3 $2x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{7} = 0$ (mit WTR)

2.4 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von u : $9x^2 - 3ux + 1 = 0$

3. Potenzgleichungen

- Lösen von Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten
- bei negativen Exponenten: siehe 6.4

Beispiele

3.1 $4x^3 + 35 = 21$

3.2 Bei einer verbeulten Münze ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwölf Würfeln kein „Wappen“ zu erhalten, etwa 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt „Wappen“ im dreizehnten Wurf? (mit WTR)

4. Exponentialgleichungen

- Lösen von Exponentialgleichungen mit beliebiger Basis

Beispiele

4.1 $4 \cdot e^{-x} = 1$

4.2 $2 \cdot 3^x = 8$

4.3 $2 \cdot e^{2x+1} = 3$ (mit WTR)

- 4.4 Wie oft muss man einen fairen Würfel mindestens werfen, um mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal eine „Sechs“ zu erhalten? (mit WTR)

5. Wurzelgleichungen

- Lösen von Wurzelgleichungen durch Quadrieren, ggf. nach Isolieren des Wurzelterms (nur im Zusammenhang mit Abstandsberechnungen)
- nicht: Mehrfaches Quadrieren (bei mehreren Wurzeltermen)
- nicht: Betrachtung der Definitionsmenge, Überprüfung einer ermittelten Lösung
- nicht: Optimierung bei Wurzelfunktionen mit Mitteln der Differenzialrechnung

Beispiele

- 5.1 Welche Punkte der Normalparabel haben den Abstand $\sqrt{20}$ vom Ursprung?

- 5.2 Welche Punkte der Geraden g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ haben vom Punkt $A(3 | 5 | 3)$

den Abstand $\sqrt{13}$?

6. Bruchgleichungen

- Lösen von Bruchgleichungen, die durch einmalige Multiplikation mit x^n oder einem Linearfaktor auflösbar sind
- nicht: Betrachtung der Definitionsmenge, Überprüfung einer ermittelten Lösung

Beispiele

6.1 $\frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}$

6.2 $\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} = 3$

6.3 $2x - 7 = \frac{1}{x-3}$

6.4 $x^{-4} = 81$

7. Trigonometrische Gleichungen

- Bestimmung der Lösungen einfacher trigonometrischer Gleichungen in einem vorgegebenen Intervall
- nicht: allgemeine Angabe aller Lösungen

Beispiele

7.1 Bestimmen Sie die Lösungen im Bereich $0 \leq x \leq \pi$: $\sin(3x) = -1$

7.2 Bestimmen Sie die Lösungen im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$: $\cos(2x) = -0,8$ (mit WTR)

8. Betragsgleichungen

- Lösen einfacher Betragsgleichungen (nur ein Betrag) durch Fallunterscheidung (nur im Zusammenhang mit Abstandsberechnungen)

Beispiel

8.1 Für welche Werte von a hat der Punkt $S(6 | 6 | 6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene $E_a : 3x_2 + x_3 = a$?

9. Ungleichungen

- Lösen von Ungleichungen, die über die entsprechende Gleichung und anschließende funktionale Betrachtung gelöst werden können
- nicht: Auflösung einer Ungleichung durch Äquivalenzumformungen

Beispiele

9.1 $-x^2 + 3x + 7 > 3$

9.2 $(x + 3)(x - 1) > 0$

9.3 $(2x - 1) \cdot e^{-2x} < 0$

(siehe auch 2.4 und 4.4)

10. Lineare Gleichungssysteme

- Lösung eines LGS (einfache Koeffizienten) mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens
- nicht: Lösung eines LGS mit Parameter (bzw. Aussagen zu seiner Lösbarkeit)

Beispiele

10.1 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$

$$x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -21$$

10.2 Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung und besitzt den Extrempunkt $E(1 | 1)$.

Bestimmen Sie eine zugehörige Funktionsgleichung.